

Fiziksel Sistemlerin Matematik Modeli

Prof. Neil A.Duffie
University of Wisconsin-Madison
ÇEVİRİ
Doç. Dr. Hüseyin BULGURCU
2012

Matematik Modele Olan İhtiyaç

- Karmaşık denetim sistemlerini anlamak için sayısal matematik model gereklidir.
- Bir çok fiziksel sistemlerin modellenmesinde esas yöntemdir:
 - Mekanik
 - Elektrik
 - Hidrolik
 - Biyolojik

Modelleme Adımları

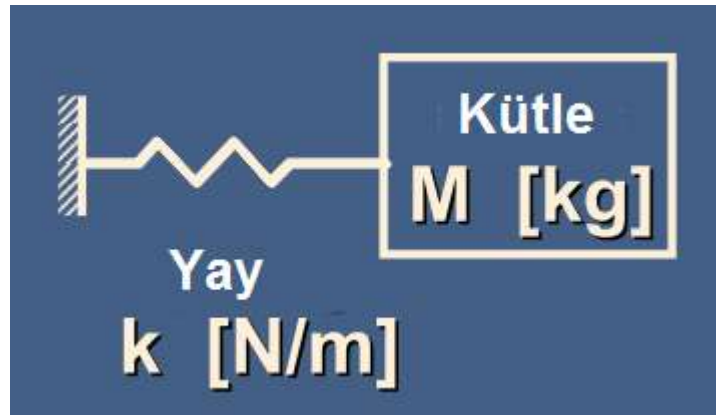
- Fiziksel sistemi ve elemanlarını anlamak
- Basitleştirmek için uygun kabuller yapmak
- Matematik modeli formüle etmek için temel prensipler kullanmak
- Modelini tanımlayan cebirsel veya diferansiyel denklemleri yazmak.
- Modelin geçerliliğini test etmek.

Modeli ne amaçla kullanacağız?

- Diferansiyel veya cebirsel denklemlerin çözülmesi sistem tepkisinin, performans analizinin ve tasarımının yapılmasına imkan verir.
- Modele Laplace dönüşümlerinin uygulanması; uygun yönlendirmelere ve dinamik analize imkan verir.
- Sistemler ve elemanları için giriş-çıkış ilişkileri alınabilir.
- Denetleyici modelleri donanıma uygun şekilde tasarlanabilecektir.

Mekanik Yay-Kütle Sistemi

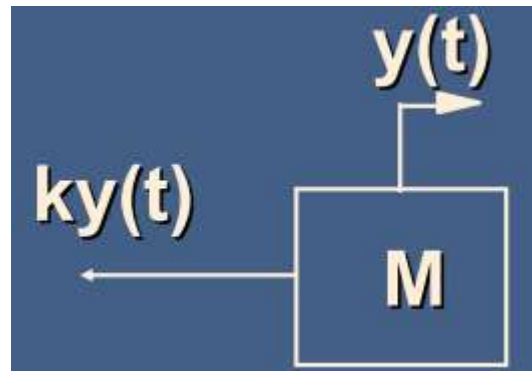
- Kütle M olan bir cismin sürtünmesiz ortamda sabit bir duvara, katsayısı k olan bir yay ile bağlandığını kabul edelim:



- Kütlenin zamana bağlı konum pozisyonu için bir modele ihtiyaç vardır.

Fiziksel Sistemin Analizi

- Yay kuvveti yalnızca kütle kuvvetinden etkilenir.



- Yay kütleye ters yönde oransal bir kuvvet uygular:
- Newton Kanunu: $\Sigma F = M \cdot a$

$$-ky(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

Diferansiyel Eşitliğin Çıkarılması

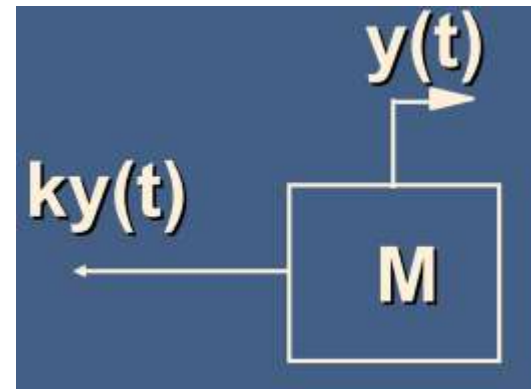
$$-ky(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + ky(t) = 0$$

$$\frac{M}{k} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = 0$$

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = 0$$

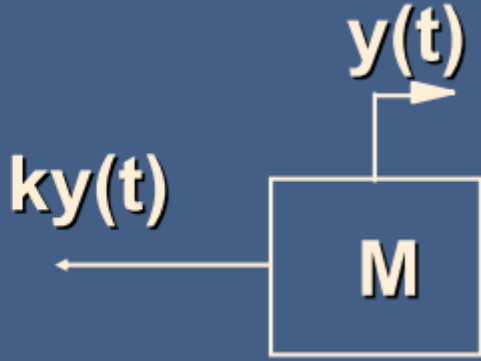
burada $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$



ω_n : Doğal frekans (Sönümleşmemiş)
 ω_n genel anlamı ile soyut bir terimdir.

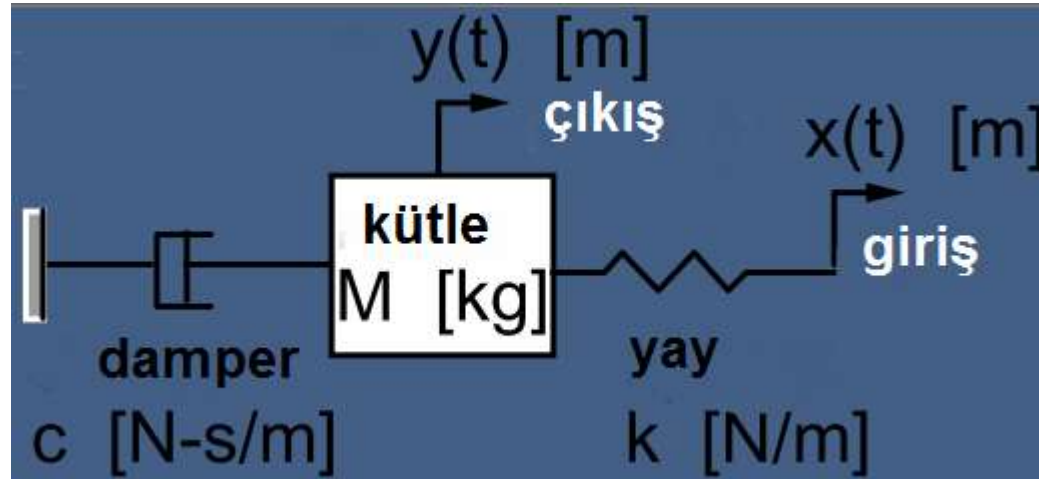
İkinci dereceden işlem

Sistem Karakteristikleri

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = 0$$


- Türev eşitliğinde sağ tarafta sıfır ile gösterilir.
- Türev eşitliğinde bu birinci terimin ihmal edilmesiyle gösterilir.
- Sistem girişe sahip değildir. Kütleyi dışarıdan etkileyen bir kuvvet yoktur.
- Sistem sönümlenmeye sahip değildir. Sistemde enerji salınımı yoktur.
- Kütle yay sabiti k olan bir yayın son konumundan $x(t)$ gerilir.
- Sönümleme katsayısı c olan amortisör harekete hızla orantılı direnç gösterir.

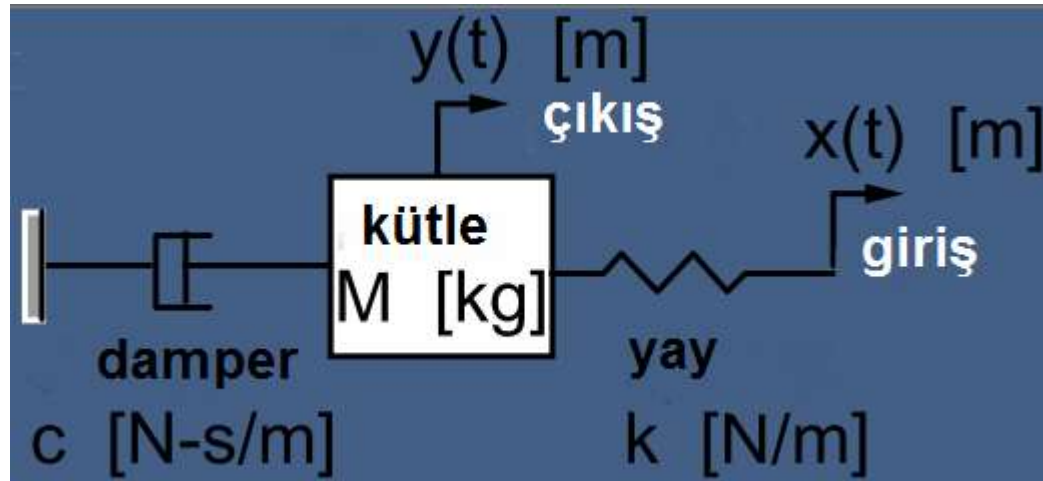
Yay-Kütle-Damper Sistemi



$$F_s = k(x(t) - y(t))$$
$$F_d = c \frac{dy(t)}{dt}$$
$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \Sigma F = F_s - F_d$$

A free-body diagram of the mass M. It shows a central block labeled "M" with two horizontal force vectors: "F_d [N]" pointing to the left and "F_s [N]" pointing to the right. Above the block, an arrow points up to "y(t) [m]".

Yay-Kütle-Damper Sistemi



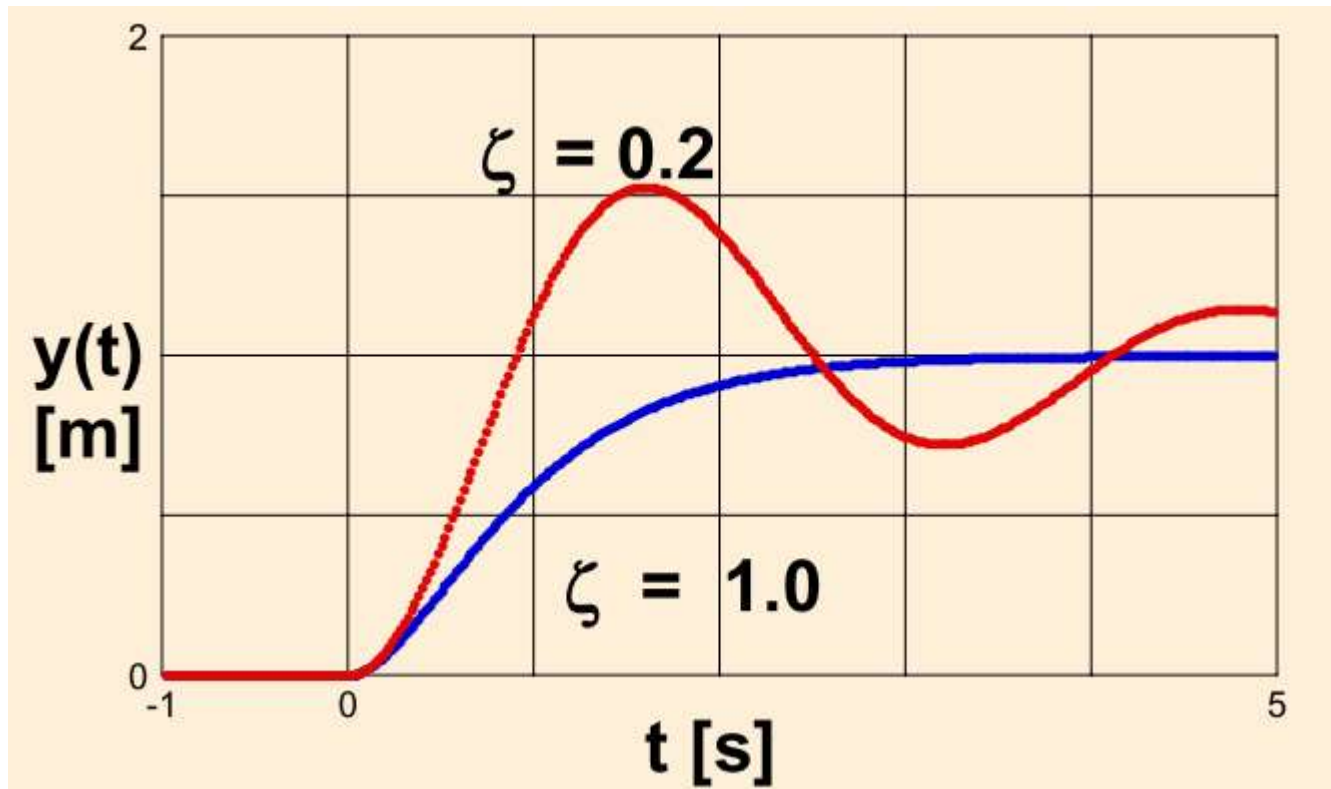
$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = k(x(t) - y(t)) - c \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

ikinci dereceden işlem $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ [r/s]}$

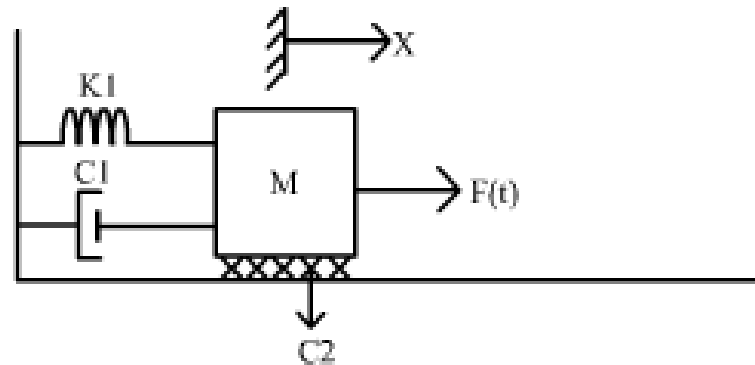
$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kM}}$$

İkinci Derecede İşlem Cevabı



Sistem girişı: $x(t)=1$ m $\omega_n=2$ r/s

KÜTLE-YAY SÖNÜMLEME SİSTEMİ



Nesneye uygulanan kuvvetlerin toplamı = Kütle x İvme

KUVVETLER:

Uygulanan = F

Yay = $-kx$

Söndürücü = $-c\dot{x}$

$$\Rightarrow F - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

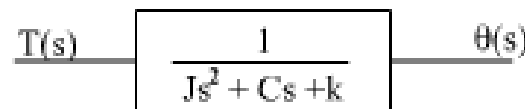
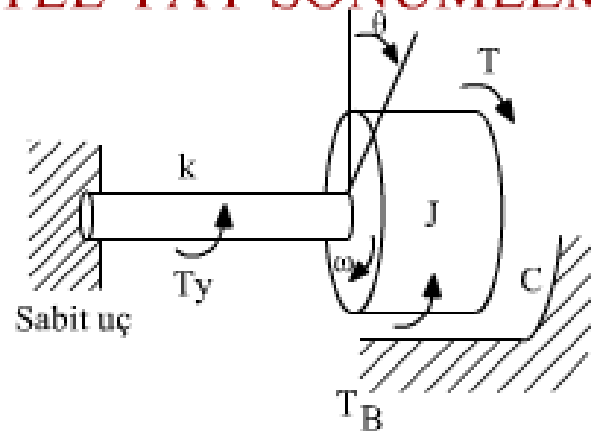
Fakat giriş çıkış kavramları denklem eşitliğinin karşılıklı kenarlarında kullanılır.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \qquad F + (-kx) + (-c \frac{dx}{dt}) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + (-c \frac{dx(t)}{dt}) + (-kx)$$

giriş çıkış

DÖNEL KÜTLE YAY SÖNÜMLEME SİSTEMİ



MOMENTLER:

Uygulanan = T

Yay = $-k\theta$

Söndürücü = $-c\dot{\theta}$

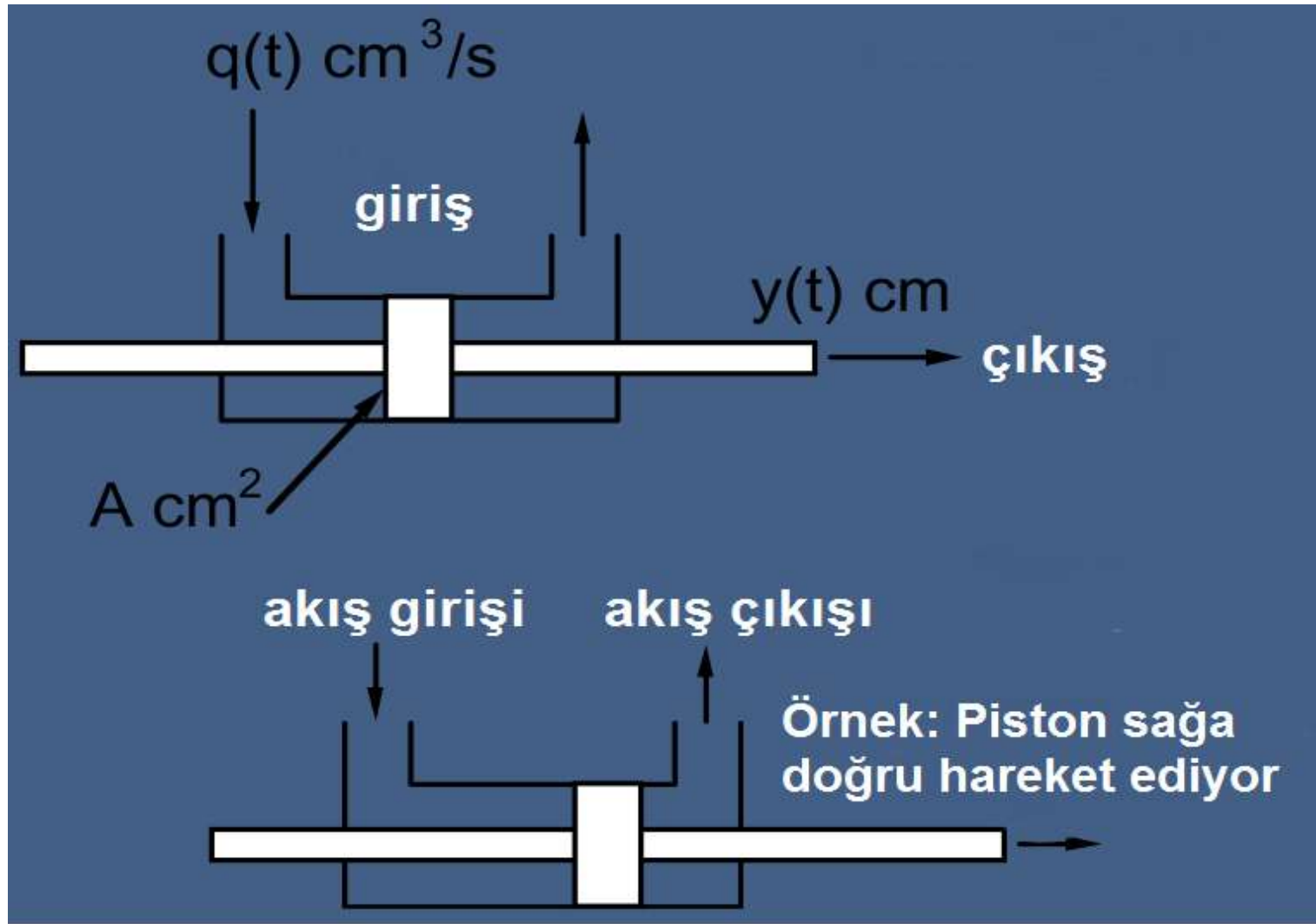
$$\Rightarrow T - k\theta - c\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \Rightarrow$$

Fakat giriş çıkış kavramları denklem eşitliğinin karşılıklı kenarlarında kullanılır.

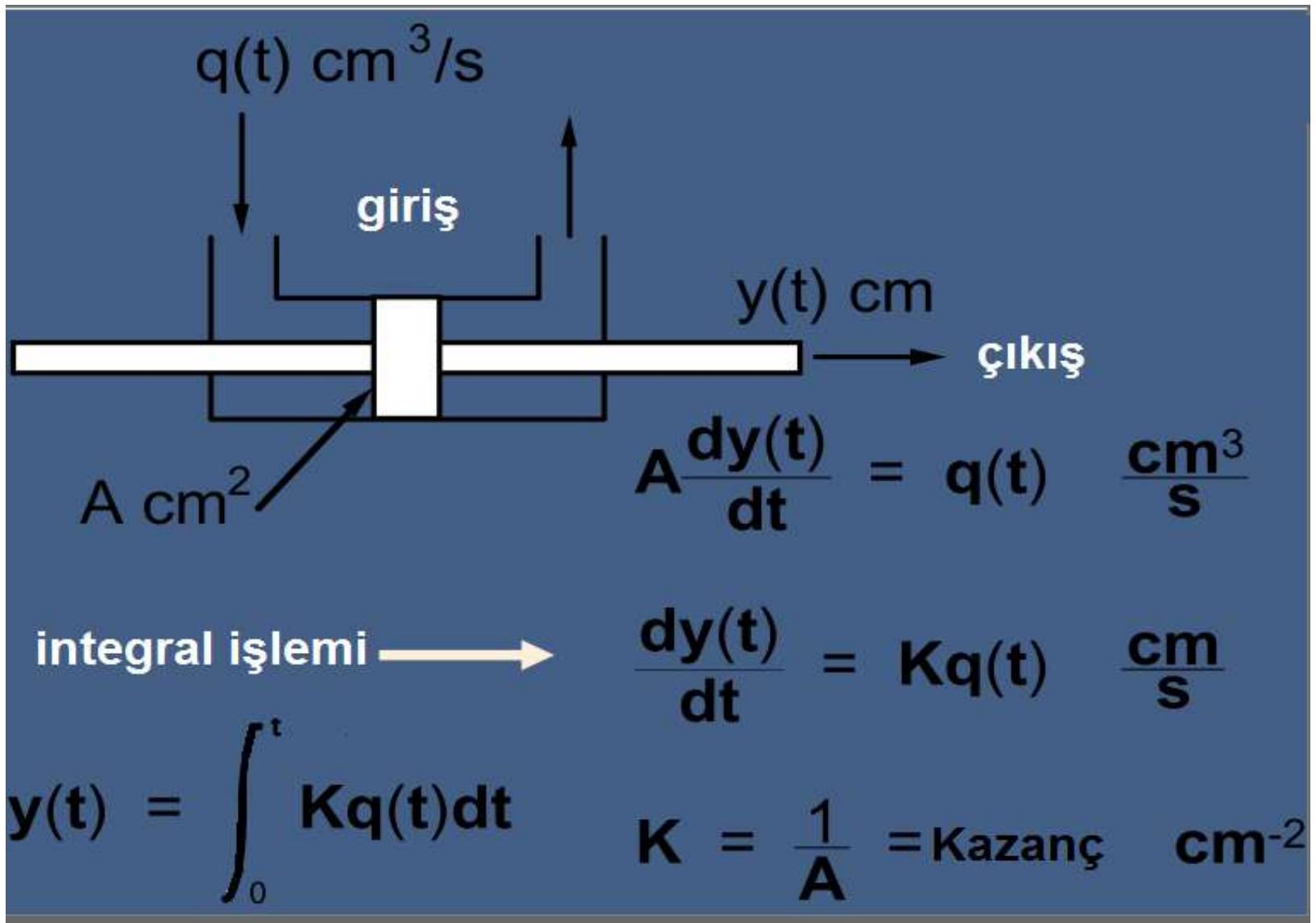
$$J\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + k\theta = T \qquad T + (-k\theta) + (c \frac{d\theta}{dt}) = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\underbrace{T(t)}_{\text{giriş}} = \underbrace{J \frac{d^2\theta}{dt^2} + (c \frac{d\theta}{dt}) + (k\theta)}_{\text{çıkış}}$$

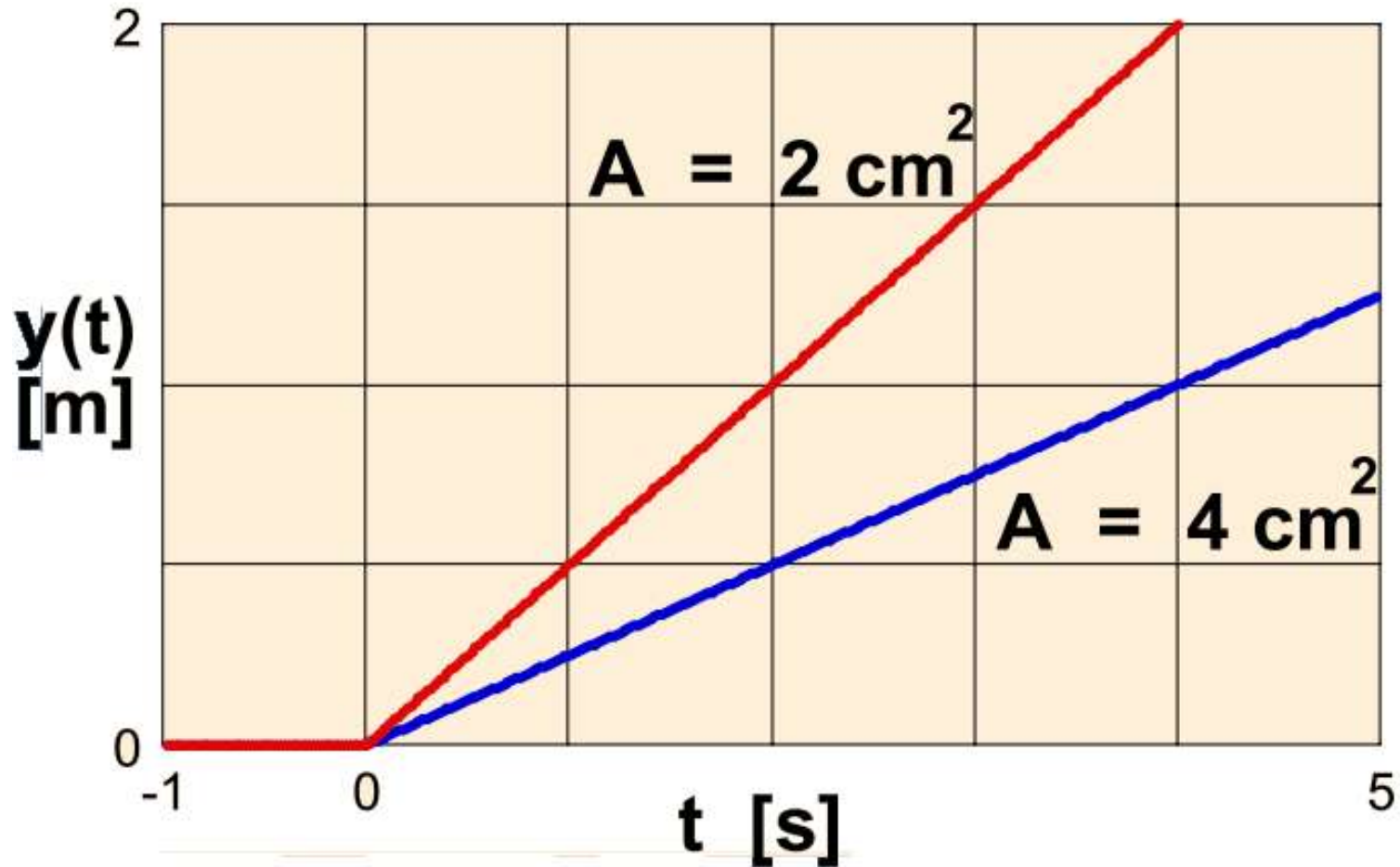
Hidrolik Silindir



Hidrolik Silindir

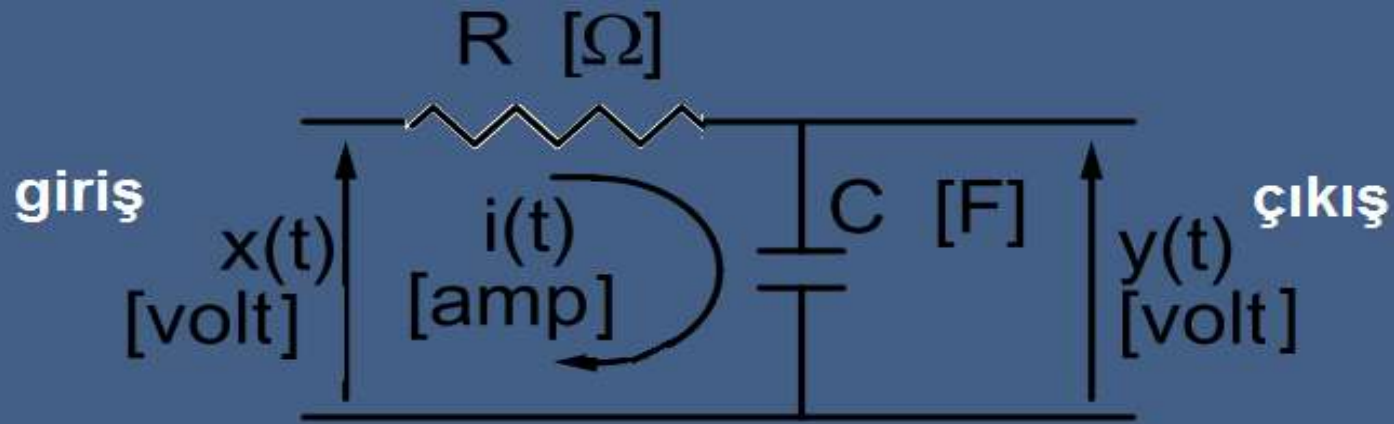


Entegral İşlem Cevabı



Adım giriş: $q(t)=1 \text{ cm}^3/\text{s}$

RC Devre

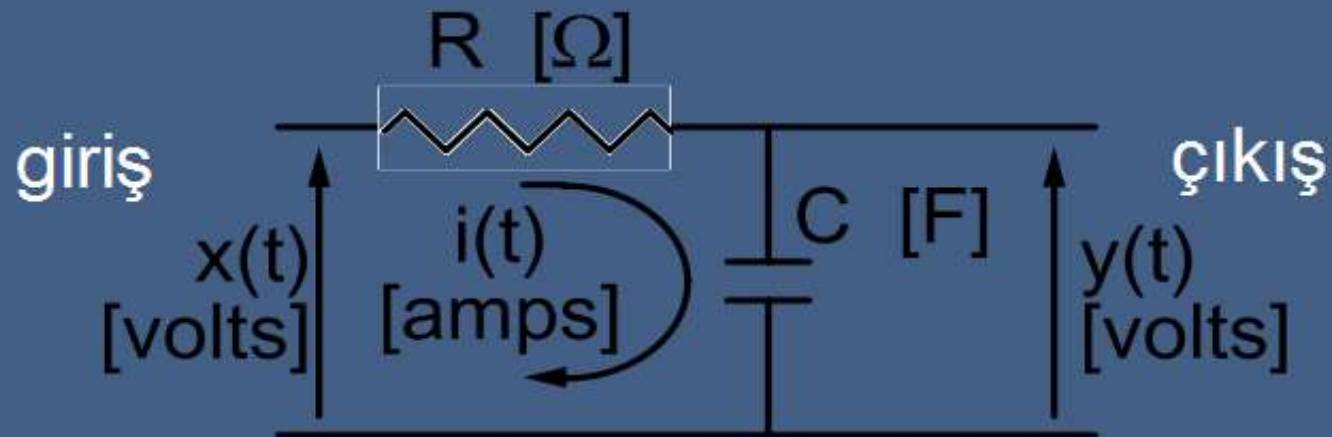


$$\square \quad e = 0 \quad \text{volt}$$

$$x(t) - Ri(t) - y(t) = 0 \quad \text{volt}$$

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \quad \text{amp}$$

RC Devre

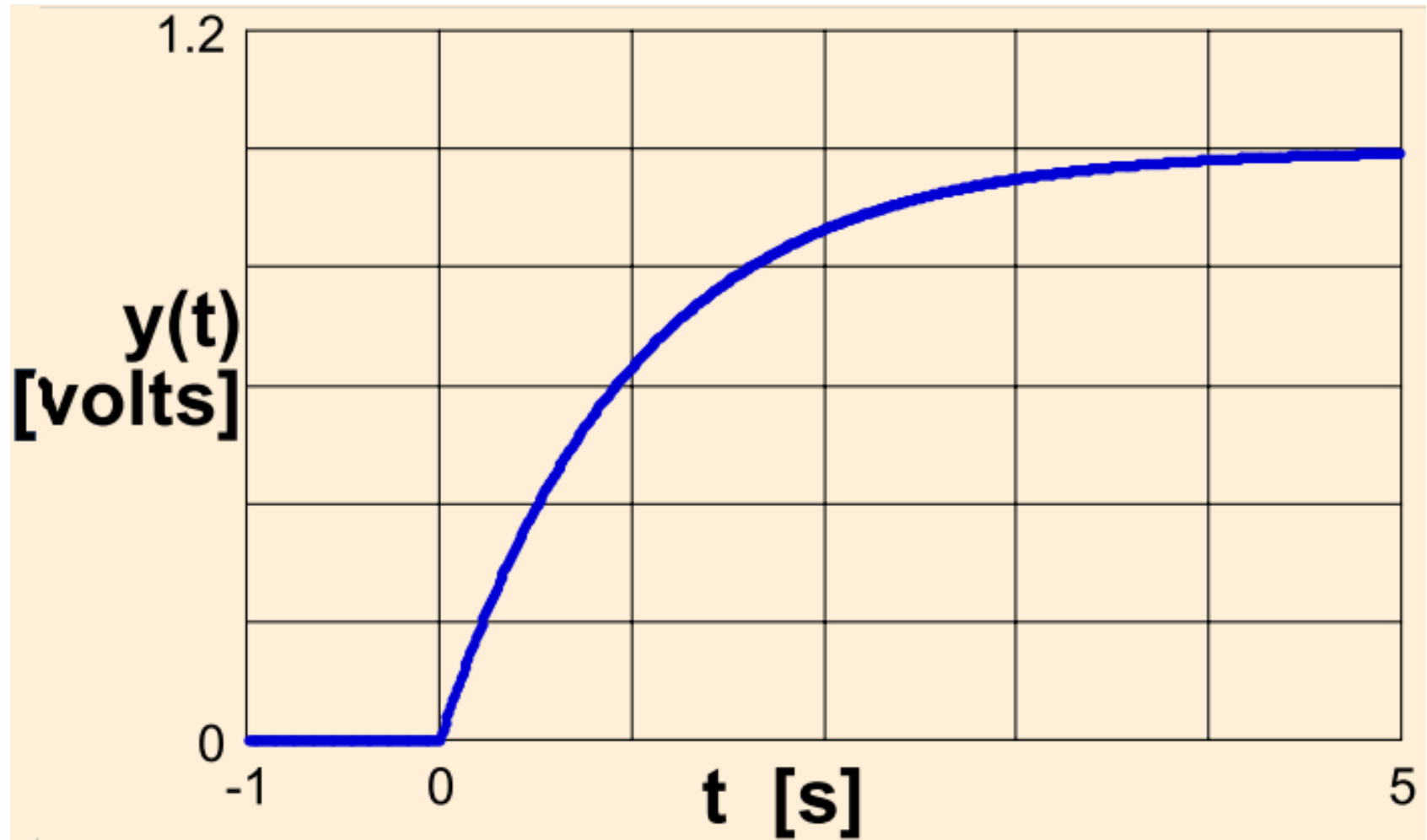


$$x(t) - RC \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = 0 \quad \text{volts}$$

1.dereceden işlem $\longrightarrow \tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad \text{volts}$

Zaman sabiti: $\tau = RC$ saniye
Kazanç: 1 volt/volt

Birinci Derece İşlem Cevabı



Adım girişi: $x(t) = 1$ Volt

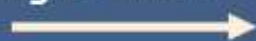
$\tau = 1$ saniye

Karışım Vanası ve Boru



$$D = \frac{d}{q} \quad [\text{s}]$$

Gecikme işlemi



$$c(t) = x(t - D) \quad [\%]$$

Yaygın İşlem Tipleri

gecikme :

$$c(t) = Km(t - D)$$

entegrasyon :

$$\frac{dc(t)}{dt} = Km(t)$$

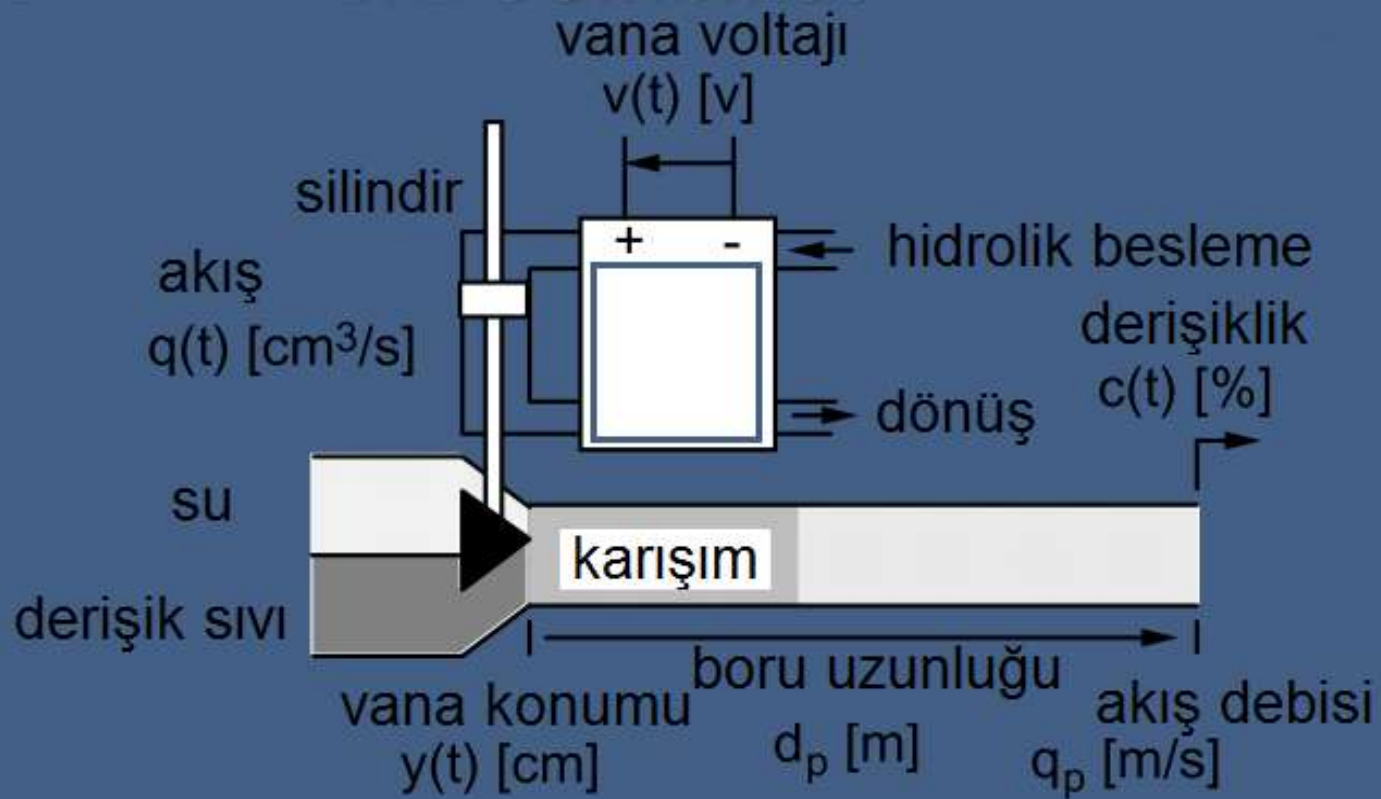
1.derece :

$$\tau \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Km(t)$$

2.derece :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Km(t)$$

Bileşen Kombinasyon Örneği



Karışım vanası ve boru (gecikme)
Hidrolik silindir (entegrasyon)
Akış kontrol vanası (2.derece)

Bileşen Kombinasyon Örneği

akış kontrol vanası

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = K''m(t)$$

silindir

$$\frac{dy(t)}{dt} = Kq(t)$$

Giriş

karışım vanası

$$x(t) = K'y(t)$$

Çıkış

boru

$$c(t) = x(t - D)$$

Bileşen Kombinasyon Örneği

Sonuç: 4.derece ile gecikme

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} = K'''m(t - D)$$

doğrulama

basitleştirme?

Çalışır Model Oluşturulması

- Hedef düşük dereceden doğrusal modeli geçerli kılmak ve “bir bakışta” hissetmektir.
- Fiziksel bileşenleri anlamak.
- Uygun kabuller yapmak.
- Model için basit bağıntıları kullanmak.
- Gerektiğinde doğrusal hale getirmek.
- Diferansiyel ve cebirsel eşitlikler yazmak.
- Bağıntıları birleştirmek ve basitleştirmek.
- Modelin geçerliliğini test etmek.

Yaygın İşlem Tipleri

gecikme :

$$\mathbf{c(t) = Km(t - D)}$$

Entegrasyon:

$$\frac{\mathbf{dc(t)}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{Km(t)}$$

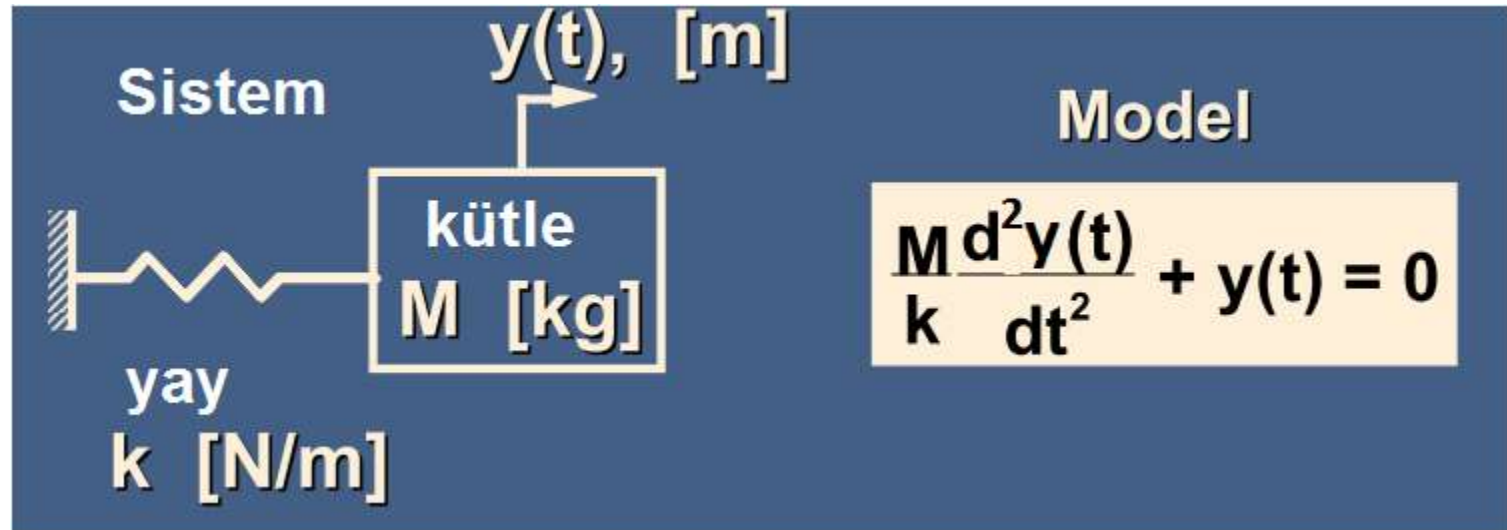
1.derece türev :

$$\tau \frac{\mathbf{dc(t)}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{c(t) = Km(t)}$$

2.dereceden türev:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{\mathbf{d^2c(t)}}{\mathbf{dt^2}} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{\mathbf{dc(t)}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{c(t) = Km(t)}$$

Yay-Kütle Modeli İçin Varsayımlar



- Yay sola doğru aşırı sıkıştırılırsa model doğru mudur?
- Yay sağa doğru aşırı uzatılırsa model doğru mudur?
- Tüm modeller bir yaklaşım öngörür ve böylelikle bazı hatalar içerir.
- Bir aralıkta, belli bir çalışma noktası etrafında, sistem davranışlarını doğrusal bir modele yaklaştırılır.

Doğrusallaştırma

- Bir sistemin doğru bir bileşeni için;
Şayet x_1 giriş için y_1 çıkış alınıyor ve
Şayet x_2 girişi için y_2 çıkışı alınıyorsa sonra x_1+x_2 girişi
için y_1+y_2 çıkışı alınır.

doğrusal örnek :

$$\frac{dy(t)}{dt} = Kx(t)$$

doğrusal olmayan örnek:

$$\frac{dy(t)}{dt} = K[x(t)]^2$$

Gerçek dünya doğrusal değildir!

Taylor Serisi Açılımı-Tek değişkenli

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \text{daha yüksek kademe terimler}$$

- x_0 yapılan açılımdaki çalışma noktasıdır.
- $x-x_0$ değerinin küçük kademelerinde çalışma noktasının yansımaları fonksiyona iyi bir yaklaşım gösterir.

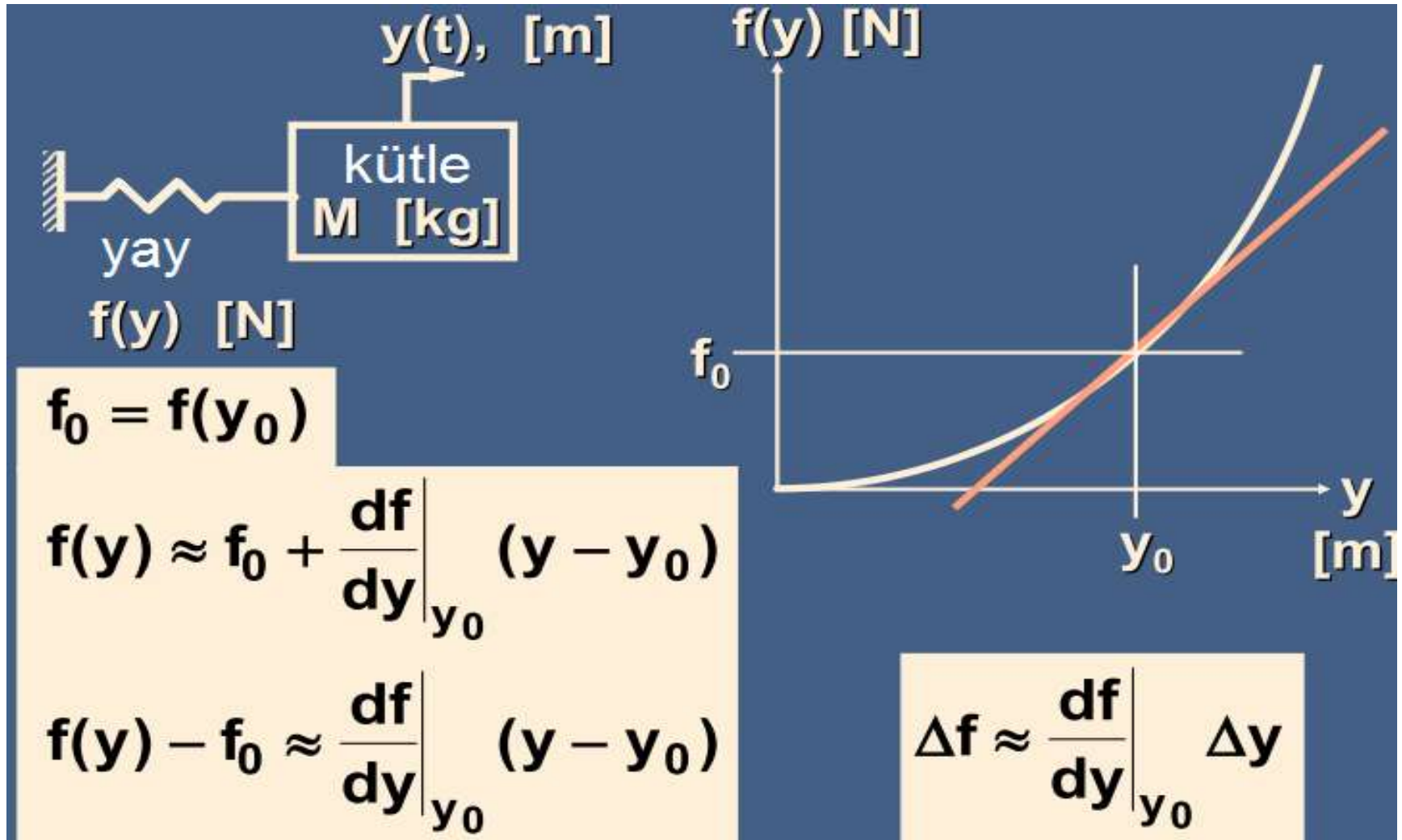
$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} (x - x_0)$$

Taylor Serisi Açılımı-Çok değişkenli

$$f(\mathbf{x}, y, \dots) = f(\mathbf{x}_0, y_0, \dots) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0, y_0, \dots} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\mathbf{x}_0, y_0, \dots} (y - y_0) + \dots$$

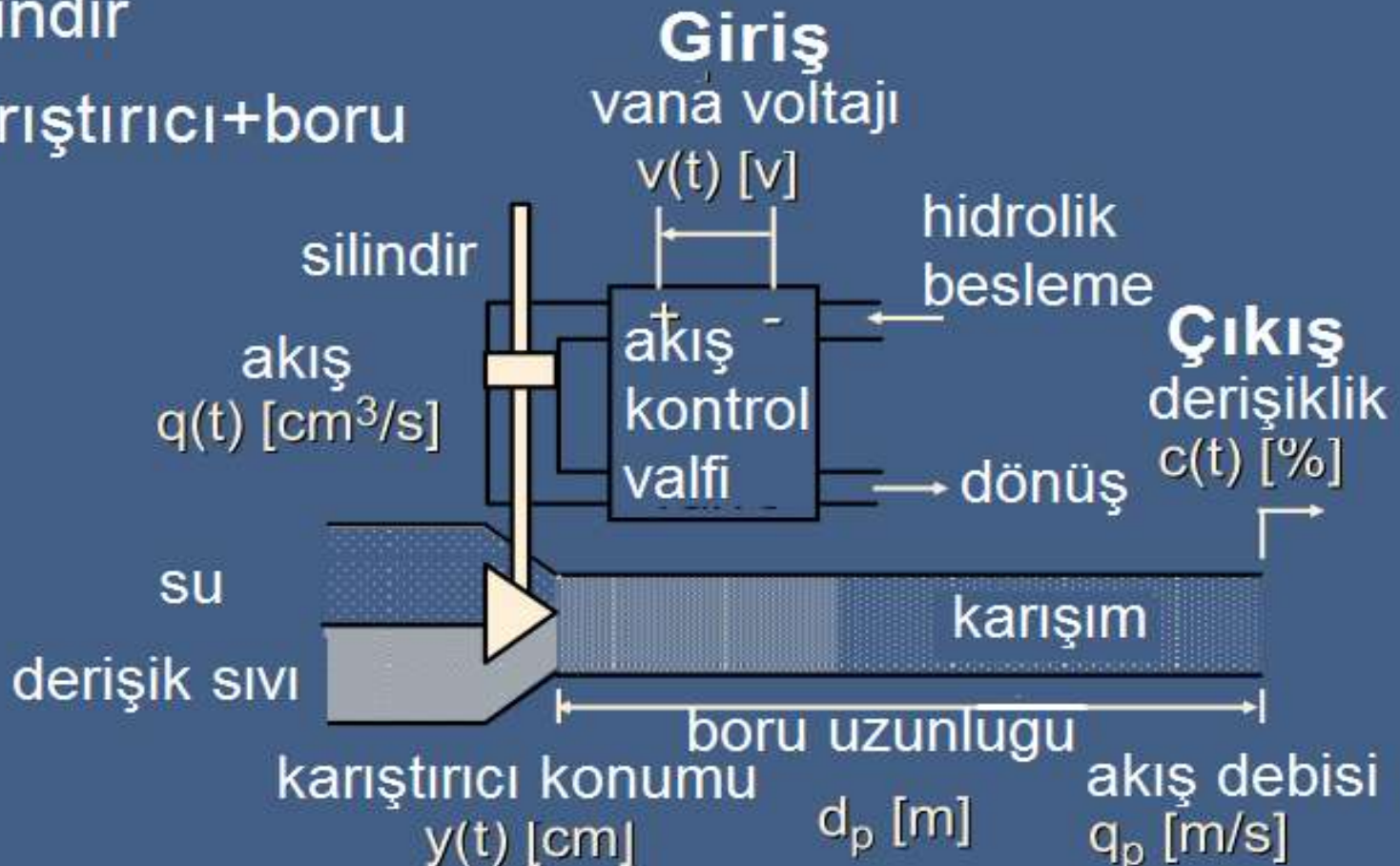
- $\mathbf{x}_0, y_0$, yapılan açılımdaki çalışma noktasıdır.
- $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), (y-y_0)$ değerinin küçük kademelerinde çalışma noktasının yansıması fonksiyona iyi bir yaklaşım gösterir (yüksek dereceden terimler ihmal edilmiştir).

Doğrusal Olmayan Yay

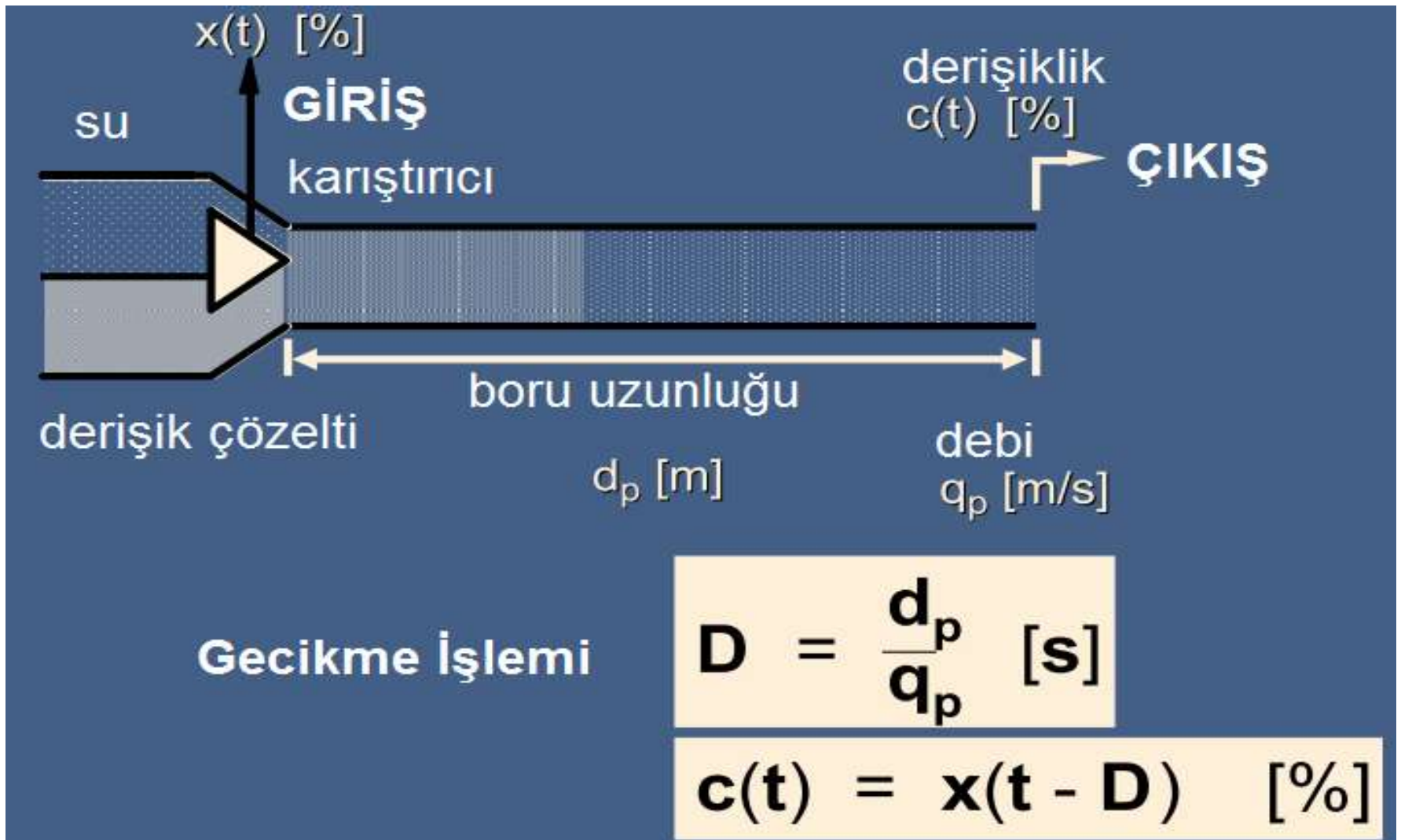


Bileşen Kombinasyonu Örneği

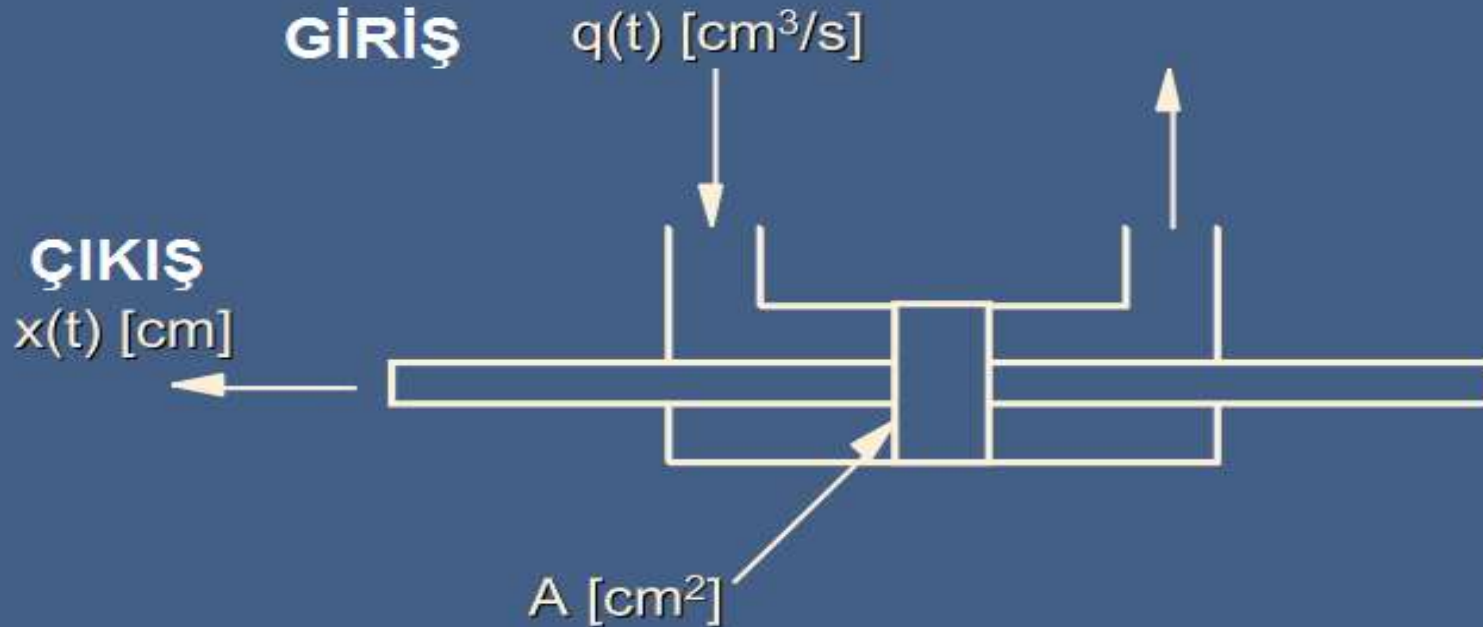
- Akış kontrol vanası
- Silindir
- karıştırıcı+boru



Karıştırıcı ve Boru



Hidrolik Silindir



**Entegrasyon
İşlemi**

$$\frac{dx(t)}{dt} = K_c q(t) \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$K_c = \frac{1}{A}$$

Bileşen Kombinasyonu Örneği

akış kontrol vanası (2.derece türev):

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = K_v v(t)$$

GİRİŞ

silindir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = K_c q(t)$$

ÇIKIŞ

boru

$$c(t) = x(t - D)$$

Bileşen Kombinasyonu Örneği

boru:

$$\mathbf{c(t) = x(t - D)}$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{dx(t - D)}{dt}$$

silindir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = K_c q(t)$$

$$\frac{dx(t - D)}{dt} = K_c q(t - D)$$

silindir+boru

$$\frac{dc(t)}{dt} = K_c q(t - D)$$

Bileşen Kombinasyonu Örneği

akış kontrol vanası + silindir + boru:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} = K v(t - D)$$

$$K = K_c K_v$$

3. dereceden gecikmeli türev

**(2.dereceden türev +
gecikme entegrasyonu)**

**Basitleştirme?
Doğrulama**

Model Basitleştirilebildi mi?

- Doğal frekans ω_n beklenen çalışma frekanslarıyla karşılaştırıldığında çok yüksek ise sönümlenme ne çok yüksek ne de çok düşük olur ($\zeta \approx 1$),

$$\frac{dc(t)}{dt} \approx K v(t - D)$$

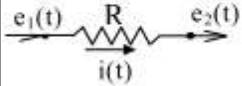
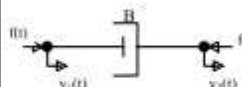
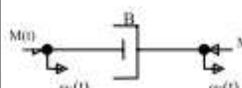
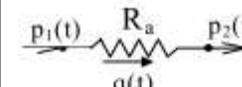
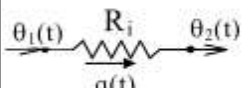
- D gecikmesi, beklenen cevap zamanıyla karşılaştırıldığında çok küçükse,

$$\frac{dc(t)}{dt} \approx K v(t)$$

Laplace Dönüşümlerine Olan İhtiyaç

- Diferansiyel bağıntıları basitleştirip birleştirerek kullanışlı hale getirir.
- Modelleri sadeleştirip kolaylaştırır.
- Sistem ve bileşenlerin blok diyagramlarının çiziminde kolaylık sağlar.
- Diferansiyel bağıntıların çözümünü kolaylaştırır (Çeşitli girişler için çıkışlar bulunur).
- Kararlılık analizi, frekans cevabı, vb. hesaplamalarda kolaylık sağlar.
- Denetim cihazı tasarımını kolaylaştırır.

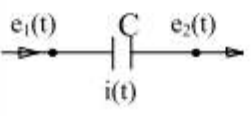
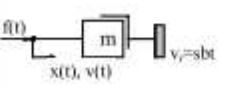
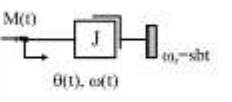
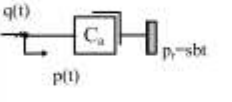
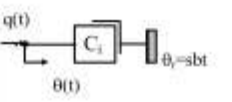
TABLO-1.1 İdeal sistem elemanlarının temel özellikleri

ELEMAN TÜRÜ	Fiziksel Eleman	Elemanın Modeli	Temel Denklemi	Transfer Fonksiyonu	Denk İmpedans	Elemanın Sabitinin Tanımı Ve Birimi
<i>Enerjiyi yutan veya dağıtan elemanlar</i>	Elektriksel direnç		$e(t) = Ri(t)$	$\frac{E(s)}{I(s)} = R$	R	$R = \frac{\Delta e}{\Delta i} [\text{Volt} / \text{A}]$
	Öteleme sönümleyici (mekaniksel direnç)		$f(t) = Bv(t)$ $f(t) = B \frac{dx}{dt}$	$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{B}$ $\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{Bs}$	$\frac{I}{B}$ $\frac{I}{Bs}$	$B = \frac{F}{V} [\text{N} / (\text{m} / \text{s})]$
	Dönme sönümleyici		$M(t) = B\omega(t)$ $M(t) = B \frac{d\theta}{dt}$	$\frac{\omega(s)}{M(s)} = \frac{1}{B}$ $\frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{Bs}$	$\frac{I}{B}$ $\frac{I}{Bs}$	$B = \frac{\Delta M}{\Delta \omega} \left[\frac{\text{Nm}}{(\text{rad/s})} \right]$
İDEAL DİRENÇ ELEMANLARI	Akışkan direnci		$p(t) = R_a q(t)$ $h(t) = R_a q(t)$	$\frac{P(s)}{Q(s)} = R_a$ $\frac{H(s)}{Q(s)} = R_a$	R_a	$R_a = \frac{\Delta h}{\Delta Q} \left[\frac{\text{m}}{(\text{m}^3/\text{s})} \right]$ $R_a = \frac{\Delta P}{\Delta Q} \left[\frac{(\text{N/m}^2)}{(\text{m}^3/\text{s})} \right]$
	Isıl direnç		$\theta(t) = R_i q(t)$	$\frac{\theta(s)}{Q(s)} = R_i$	R_i	$R_i = \frac{\Delta q}{\Delta q} \left[\frac{\text{°C}}{(\text{J/s})} \right]$

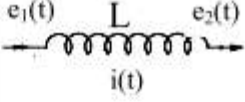
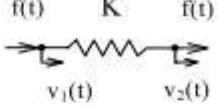
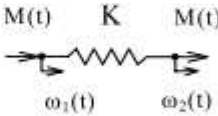
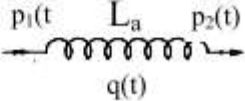
TABLO-1.1 İdeal sistem elemanlarının temel özellikleri (devam)

**Enerjiyi
kapasitif etki ile
depolayan
elemanlar**

**İDEAL
KAPASİTE
ELEMANLARI**

Elektriksel kapasite		$i(t) = C \frac{de}{dt}$ $e(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$\frac{E(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$	$\frac{1}{Cs}$	$C = \frac{idt}{de} \text{ (farad)}$
Kütle (Mekaniksel kapasite)		$f(t) = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$ $f(t) = m \frac{dv}{dt}$	$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms}$ $\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2}$	$\frac{1}{ms}$ $\frac{1}{ms^2}$	$F = \frac{a}{m} \left[\frac{(m/s^2)}{kg} = N \right]$
Eylemsizlik momenti		$M(t) = J\alpha = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$ $M(t) = J \frac{d\omega}{dt}$	$\frac{\omega(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js}$ $\frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js^2}$	$\frac{1}{Js}$ $\frac{1}{Js^2}$	$M = \frac{\alpha}{J} \left[\frac{(rad/s^2)}{kgm^2} = Nm \right]$
Akışkan kapasitesi		$q(t) = C_a \frac{dp}{dt}$ $q(t) = C_a \frac{dh}{dt}$	$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{C_a s}$ $\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{C_a s}$	$\frac{1}{C_a s}$	$C_a = \frac{Qdt}{\Delta p} \left[\frac{m^3}{(N/m^2)} \right]$
Isıl kapasite		$q(t) = C_i \frac{d\theta}{dt}$	$\frac{\theta(s)}{Q(s)} = \frac{1}{C_i s}$	$\frac{1}{C_i s}$	$C_i = \frac{qdt}{\Delta\theta} \left[\frac{J}{\ddot{e}C} \right]$

TABLO-1.1 İdeal sistem elemanlarının temel özellikleri (devam)

Enerjiyi endüktif etki ile depolayan elemanlar İDEAL İNDÜKTANS ELEMANLARI	Elektriksel indüktans		$e(t) = L \frac{di}{dt}$	$\frac{E(s)}{I(s)} = Ls$	Ls	$L = \frac{\Delta e}{di/dt} [\text{Henry}]$
	Öteleme yayı		$f(t) = Kx(t)$ veya $v(t) = \frac{1}{K} \frac{df}{dt}$	$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{K} s$ $\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{K}$	$\frac{1}{k} s$ $\frac{1}{k}$	$k = \frac{\Delta F}{\Delta X} [\text{N / m}]$
	Burulma yayı		$M(t) = Kx(t)$ veya $\omega(t) = \frac{1}{K} \frac{dM}{dt}$	$\frac{\omega(s)}{M(s)} = \frac{1}{k} s$ $\frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{k}$	$\frac{1}{k} s$ $\frac{1}{k}$	$k = \frac{\Delta M}{\Delta \theta} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$
	Akışkan indüktans (Akışkan eylemsizliği)		$p(t) = L_a \frac{dq}{dt}$	$\frac{P(s)}{Q(s)} = L_a s$	$L_a s$	$L_a = \frac{pdt}{Q} \left[\frac{(\text{N/m}^2)s}{(\text{m}^3/\text{s})} \right]$