Ders #2

Otomatik Kontrol

Laplas Dönüşümü

Prof.Dr.Galip Cansever

Pierre-Simon Laplace, 1749-1827

Matematiçi ve Astronomdur.

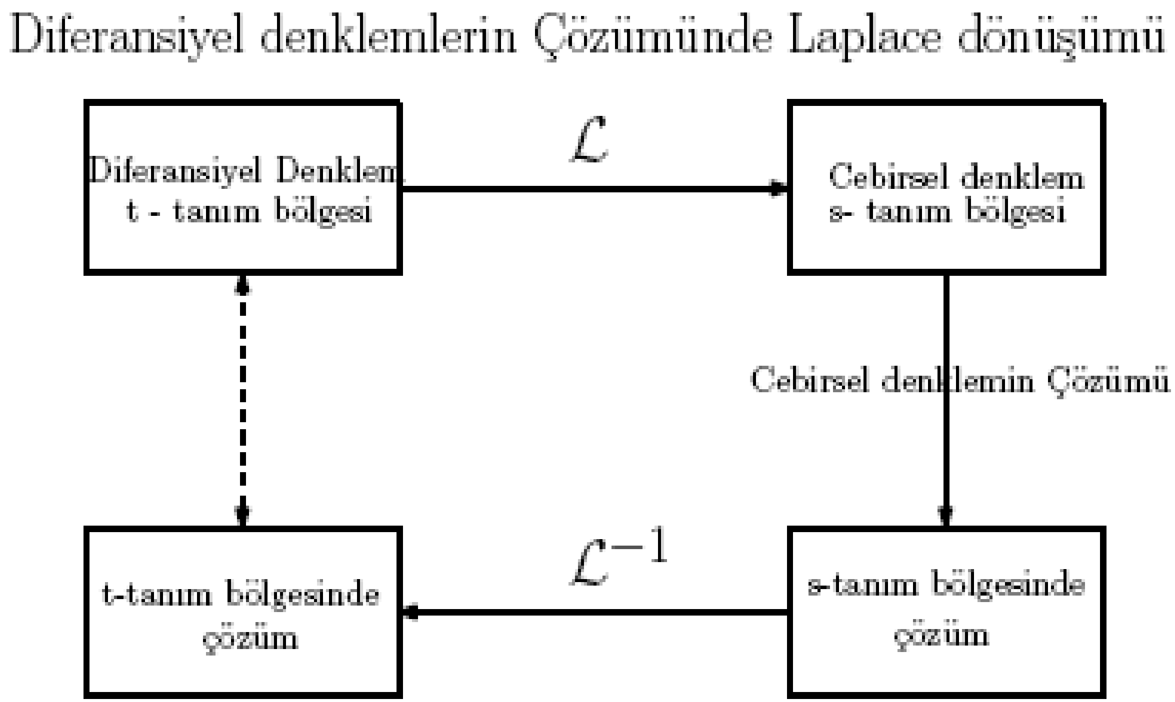
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laplace.html

LAPLAS DÖNÜŞÜMÜ

Zamanla değişen bir **f(t)** fonksiyonunun Laplas dönüşümü

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad s > 0$$

İle elde edilir ve gösterimi: $\mathcal{L}\{f(t)\}$



Laplas dönüşümü, diferansiyel denklemlerin cebirsel ifadelere dönüştürülerek çözümlerinin kolayca elde eldilmesi amcıyla kullanılır.

Teorem: Laplace dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

İspat: Bu dönüşümün lineer olamsı için linner olma şartlarını sağlaması gerekir;

1) $\mathcal{L}(f+g) \stackrel{?}{=} \mathcal{L}(f)+\mathcal{L}(g)$

2) $\mathcal{L}(cf) = c(f)$

$$\int_0^\infty (f(t)+g(t))e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$

$$= F(s)+G(s)$$

$$\int_0^\infty cf(t)e^{-st}dt = c\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = c\mathcal{L}(f(t))$$

Lineer olmanın her iki şartını da sağladığı için Laplas dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

Bazı Önemli Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri

Örnek: $f(t) = 1$ İse f(t) nin Laplas dönüşümü nedir? $F(s) =?$

$$\int_0^\infty 1e^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\frac{e^{-sR}-1}{-s} = \frac{1}{s}$$

Örnek: **$e^{at}f(t)$** nin Laplas dönüşümü nedir? $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = ?$

(Bu ifadeye üstel öteleme de adı verilir.)

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{(a-s)t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$$

Şayet $s_1 := s - a$ sabit dönüşümü yapılırsa

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-(s_1)t}dt = F(s_1) = F(s-a)$$

Sonuç: *Eğer **$e^{at}f(t)$** nin Laplas dönüşümünü bulmak istiyorsak **f(t)**'nin Laplas dönüşümünü alıp **s** yerine **s-a** yazmak yeterli olur.*

Örnek: **e^{at}** nin Laplas dönüşümü nedir?

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \mathcal{L}(e^{at}\cdot 1) = \mathcal{L}(1)|_{s:=s-a} = \frac{1}{s-a}$$

Örnek: **$e^{(a+jb)t}$** nin Laplas dönüşümü nedir?

$$\mathcal{L}(e^{(a+jb)t}) = \mathcal{L}(e^{(a+jb)t} \cdot 1) = \mathcal{L}(1)|_{s:=s-(a+jb)} = \frac{1}{s-(a+jb)}$$

Örnek: **Cos(at)** nin Laplas dönüşümü nedir?

Cos(at)'nin euler dönüşümü: $\cos at = \dfrac{e^{jat}+e^{-jat}}{2}$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{jat}+e^{-jat}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{jat}) + \mathcal{L}(e^{-jat})\right]$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-ja} + \frac{1}{s+ja}\right] = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad s > 0$$

Benzer şekilde **sin(at)**'nin Laplas dönüşümü:

$$\frac{a}{s^2+a^2} \qquad s > 0$$

Adi Diferansiyel Denklemlerin Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri ve Çözümleri

$$y'' + Ay' + By = u(t)$$

şeklinde sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlerin $y(0) = y_0$ ve $y'(0) = y'_0$ ilk koşulları altında çözümleri Laplace dönüşümü ile kolaylıkla yapılabilir. Bunun için öncelikle $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$ ile $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ şeklinde hesaplanır. Daha sonrada

$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

bulunur. Burada $y(t)$ nin türevleri mevcut olduğundan türev ve integral işlemlerinin Laplace dönüşümlerini öncelikle irdelemeliyiz.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

$$\boxed{\text{Kıs. türev. ayırma=(Türev alma,integral al)} - \int_0^\infty \text{(Her ikisinide yap)}}$$

$$= e^{-st} f(t)|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} f(t)dt$$

$$= 0 - f(0) + s \underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}_{F(s)} \quad = sF(s) - f(0)$$

Örnek: $\frac{1}{s^2 - 4s + 5}$ İfadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 4s + 5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2 + 1}\right\}$$

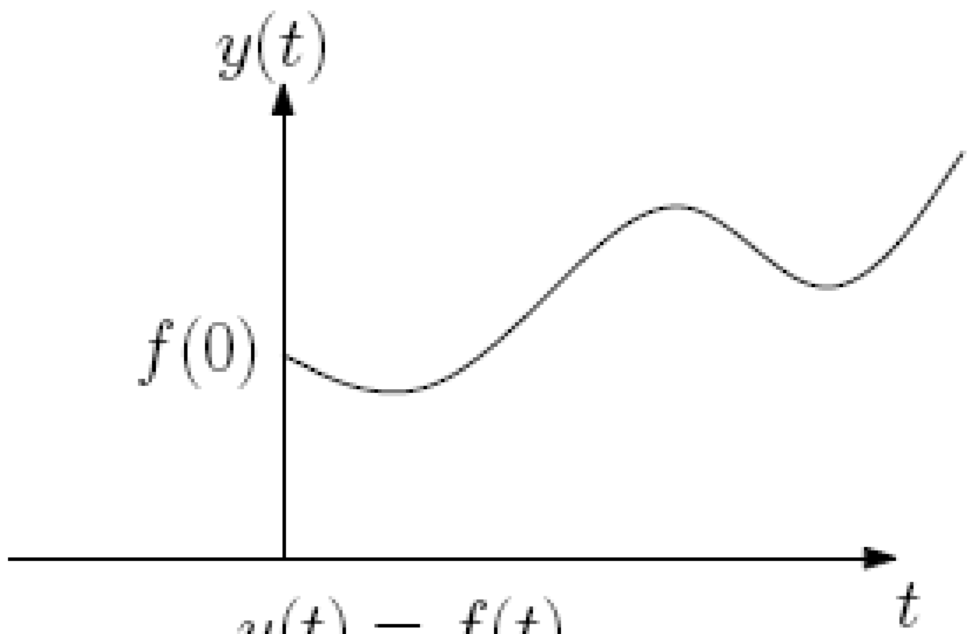
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t = F(s)$$

Bizim örneğimizde **s**'in yerini **s-2** almıştır. O halde fonksiyonumuz **F(s-2)** dir.($a = 2$)

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

Bir fonksiyonu zaman ekseni üzerinde kaydırırsak, o fonksiyonun ötelenmiş halini elde ederiz.

Fonkisyonların negatif bölgedeki değişimleri bilinmiyor olabilir.

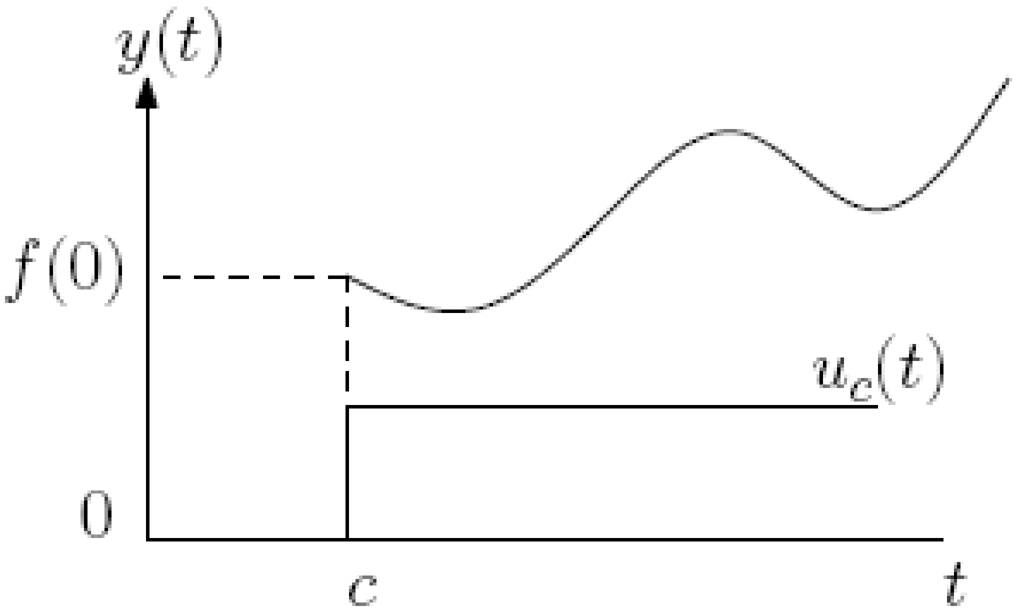


$y(t) = f(t)$

Bu durumda **f(t)** fonksiyonunu pozitif zaman ekseni üzerinde **c** kadar kaydırdığımızda **f(t)**’nin negatif zaman ekseni **üzerinde c** kadar davranışına ihtiyacımız ortaya çıkar.

Bu kısmı bilmediğimiz için kaydırılmış fonksiyonun ilk **c** birimlik süresi sıfır olmalıdır.

Dolayısyla bunu oluşturabilmek için **f(t)** fonksiyonu **c** kadar ötelenmiş birim basamak fonksiyonu ile çarpmamız gerekir.



$$y(t) = u_c(t) f(t - c)$$

Teorem: $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s)$

İspat:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt = \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt$$

Burada $\zeta := t - c$ dönüşümünü yaparsak işlemlerimiz kolaylaşacaktır, şöyle ki:

$$\int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt = \int_0^\infty e^{-s(\zeta+c)}f(\zeta)d\zeta = e^{-sc}\int_0^\infty e^{-\zeta s}f(\zeta)d\zeta = e^{-sc}F(s)$$

Örnek: $F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$ İfadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right\} = ?$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = t - u_2(t)(t-2)$$

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 2 \\ 2 & t \ge 2 \end{cases}$$

NOT: **0** – ∞ arasında tanımlanmış **sint** fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonu **π / 2** kadar zaman ekseninde sağa doğru itelersek, Laplas değeri:

$$\mathcal{L}\{\sin t\} \longrightarrow \mathcal{L}\{u_{\pi/2} \sin(t-\pi/2)\}$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} \xrightarrow{\neq} \mathcal{L}\{\sin(t-\pi/2)\}$$ Değildir.

Örnek:

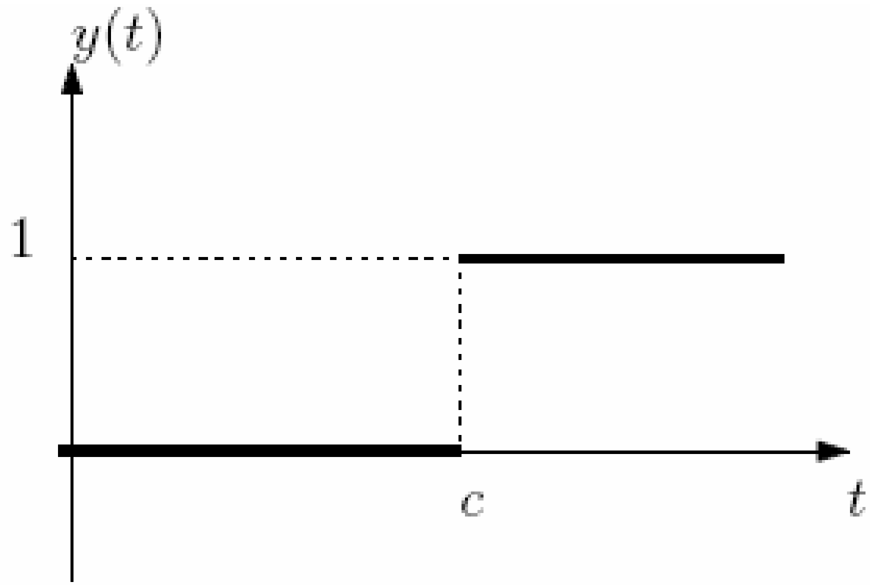
$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t \leq \pi/4 \\ \sin t + \cos(t-\pi/4) & t \geq \pi/4 \end{cases}$$

İfadesinin Laplas dönüşümünü bulunuz.

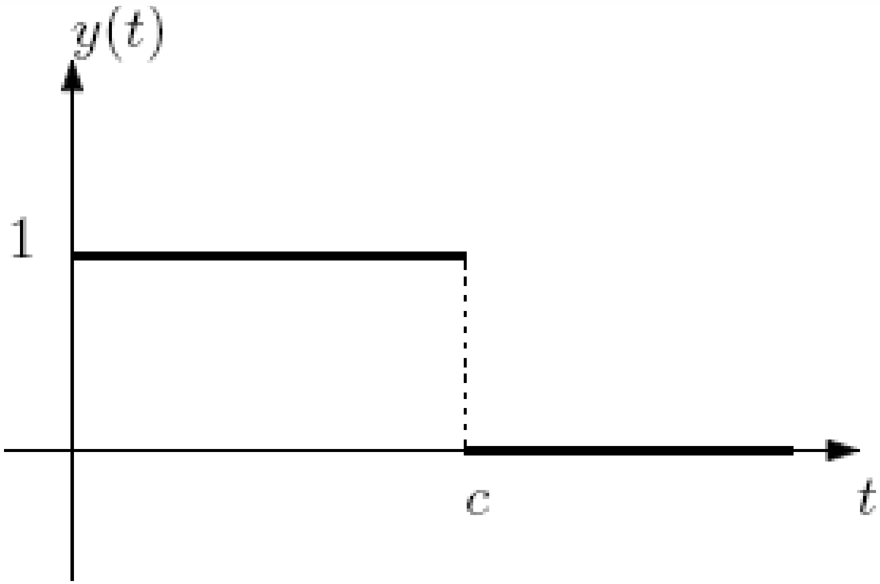
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t)\cos(t-\pi/4)\}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi/4}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1+se^{-\pi/4}}{s^2+1}$$

Sıçramalı Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri

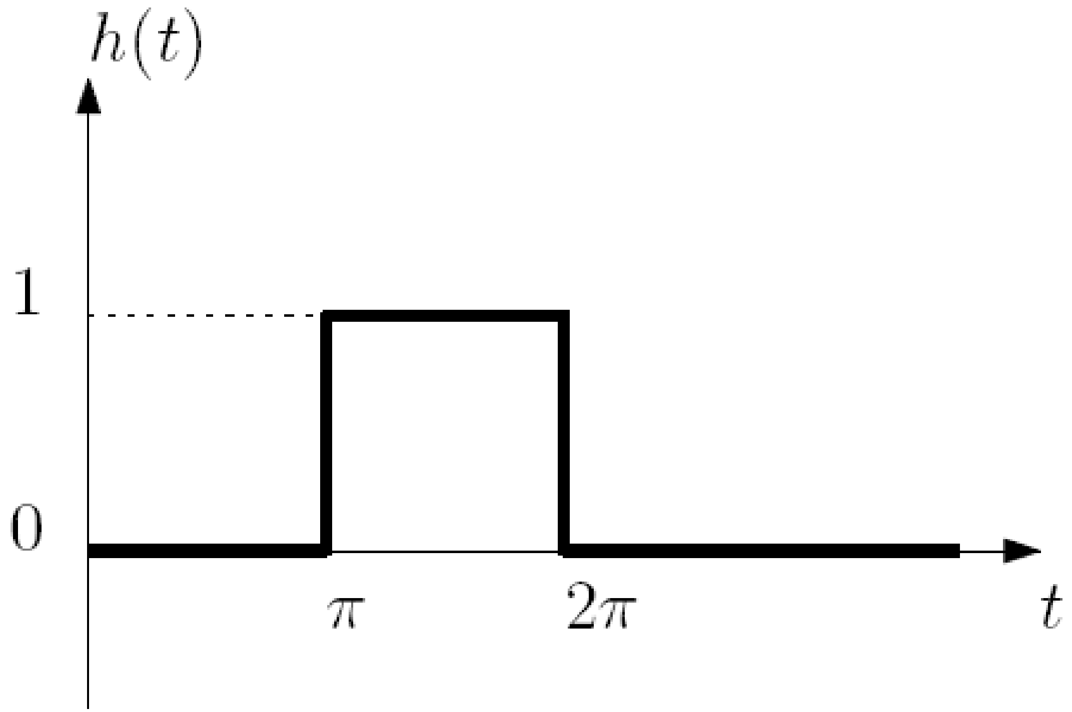


$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$



$$y(t) = 1 - u_c(t)$$

Örnek: $h(t) = u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t) \quad t \geq 0$ Fonksiyonunu çiziniz.



Örnek: $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = ?$

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$$

Örnek: **t**^{n} İfadesinin Laplas dönüşümünü bulunuz. $\mathcal{L}\{t^n\} = ?$

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}dt = t^n \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty n t^{n-1}\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n e^{-st}}{-s} = \frac{t^n}{e^{st}}\cdot\frac{1}{-s} = 0$$

Dikkat edilecek olursa ***t*** sonsuza giderken son kesirli ifadenin payı ve paydası sonsuza gitmektedir. Bu durumda L'hospital kuralı uygulanırsa kesirli ifadenin payı ***n*** adımda sıfıra giderken payda sabit kalmaktadır. Sonuç sıfır olur.

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}dt = 0 - 0 + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n(n-1)}{s^2}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \cdots = \frac{n(n-1)\cdots 1}{s^n}\mathcal{L}\{t^0\} = \frac{n!}{s^{(n+1)}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

Ters Laplas Dönüşümleri

$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$ şeklinde sembolize edilir. Kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılır, böylece karmaşık ifadeler sadeleştirilerek Laplas dönüşümü bilinen ifadeler haline dönüştürülür.

Örnek: $\frac{1}{s(s+3)}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)}\right\} = ?$$

$$\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1/3}{s} + \frac{-1/3}{s+3}$$

Terimlerin ayrı ayrı ters dönüşümlerini alacak olursak;

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)}\right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

Örnek: $\dfrac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)}\right\} = ?$$

$$\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{A}{(s+1)} + \frac{3/4}{(s-1)}$$

Eşitliğin her iki tarafı **s** in bütün değerleri için eşit ise **s=0** içinde eşittir. Bu durumda;

$$-1 = -\frac{1}{2} + A - \frac{3}{4} \qquad \boxed{A = 1/4}$$

$$\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{1/4}{(s+1)} + \frac{3/4}{(s-1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)}\right\} = -0.5te^{-t} + 0.25e^{-t} + 0.75e^{t}$$

Örnek: $\dfrac{3s+2}{s^2+42+20}$ ifadesinin ters Laplas dönüşümünü bulunuz.

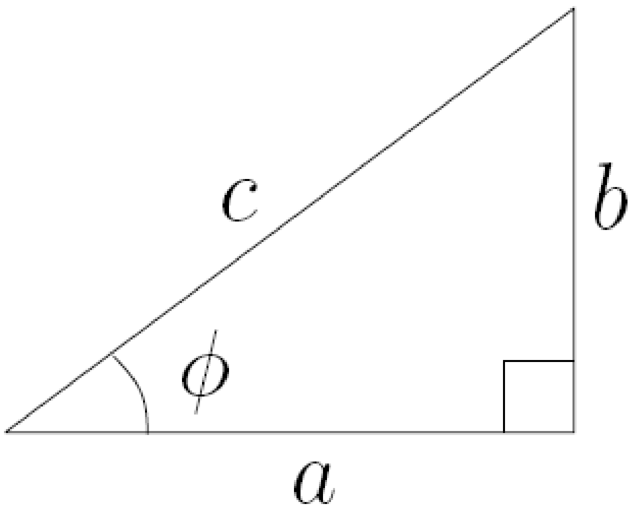
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+42+20}\right\} =?$$

$$F(s) = \frac{3s+2}{(s+2)^2+4^2} = 3\frac{s+2}{(s+2)^2+4^2} - \frac{4}{(s+2)^2+4^2}$$

Ters Laplas Dönüşümü

$$= 3e^{-2t}\cos 4t - 4e^{-2t}\sin 4t$$

Hatırlama: $a\cos r\theta + b\sin r\theta = c\cos(r\theta - \phi)$



$$f(t) = e^{-2t}[3\cos 4t - 4\sin 4t]$$

$$= e^{-2t}\cdot 5\cdot\cos(4t + \tan^{-1}(4/3))$$

Yüksek Mertebeden Türevlerin Hesaplanması

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = ?$$

$f''(t) = \left[f'(t)\right]'$ şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

$sf(0) = 0$

$f'(0) = 0$ ise

$$= s^2F(s)$$

Darbe (İmpuls) Fonksiyonu

Darbe fonksiyonu sistemelerin davranışları hakkında bilgi edinmek için kullanılır.

Darbe fonksiyonu, kuvvetin, gerilimin veya benzer fonksiyonların sisteme çok kısa süre içersinde çok büyük değerler alacak şekilde uygulanması ile oluşturulur.

Istaka ile bilardo topuna vurmak buna örnek olabilir. Bu vuruş sonrası topun dinamik davranışı, ilk değerleri sıfır kabul edilen bir sistemin darbe yanıtı şeklinde ele alınabilir.

Futbolda ise verilen bir pasa veya ortaya şut çekilmesi, vole vurulması sonrası topun dinamik davranışı, ilk değerleri sıfır olmayan bir sistemin darbe yanıtı şeklinde ele alınabilir.

$$ay'' + by' + cy = u(t)$$

formunda diferansiyel denklemler doğurur. İşte burada $u(t)$ darbe şeklinde bir fonksiyondur ve $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ aralığında çok büyük değerler alan ama diğer tüm zaman diliminde sıfır değerini alan bir fonksiyondur. Şimdi

$$I(\tau) \triangleq \int_{t_o-\tau}^{t_0+\tau} u(t)dt$$

şeklinde birintegral tanımlayalım. Açıktır ki $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ aralığının dışında $u(t) = 0$ olduğundan

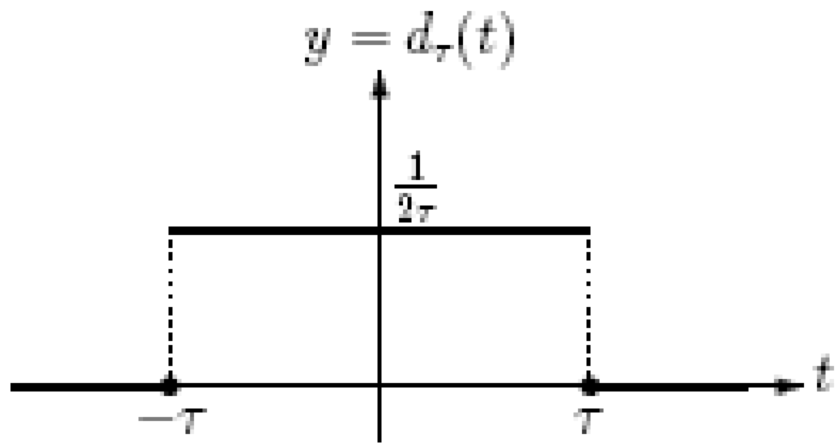
$$I(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt$$

yazılabilir. Bu integral aslında darbenin büyüklüğü hakkında bir metrik tanımlar. Örneğin mekanik bir sistemde $u(t)$ bir kuvvet fonksiyonu ise, $I(\tau)$, $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ aralığında *toplam kuvvet darbesi* olarak adlandırılır.

Şimdi özel bir durum olarak $t_0 = 0$ kabul edelim ve u(t) işaretini şu şekilde tanımlayalım:

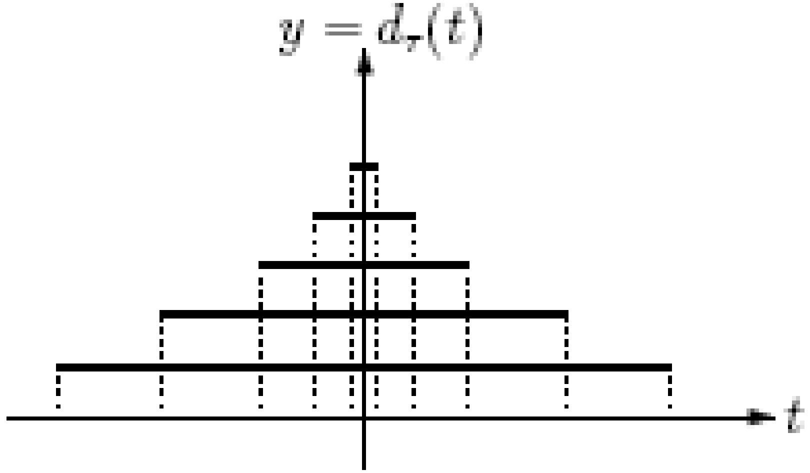
$$u(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & -\tau < t < \tau \\ 0 & t \leq -\tau \text{ veya } t \geq \tau, \end{cases}$$

Burada τ çok küçük pozitif bir sabit olsun. İlgili durum Şekilde gösterilmektedir.



$y = d_\tau(t)$ grafigi

τ→0’ giderken, grafik:



$y = d_\tau(t)$ grafigi $\tau \to 0$

Açıktır ki bu durumda τ nun değeri sıfırdan farklı olacak şekilde ne olursa olsun, $I(\tau) = 1$ olur. Şimdi τ yu giderek küçültelim. Bu durumda açıktır ki

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1$$

olur. İşte bu bizi ideal duruma götürür. O da tam $t = 0$ da genliği bire eşit olan ama diğer tüm zaman diliminde değeri sıfıra eşit olan bir fonksiyondur. İşte bu fonksiyona **birim darbe fonksiyonu (unit impulse response)** adı verilir. Biz özel olarak birim darbe fonksiyonunu $\delta(t)$ ile sembolize edeceğiz. O halde $\delta(t)$ için şu özellikler yazılabilir:

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Bu delta fonksiyonuna Dirac* fonksionu da adı verilir.

***Paul A.M. Dirac (1902-1984)**, İngiliz matematikçi ve fizikçisi, 1933 senesinde Nobel ödülü aldı.(Kuantum mekaniği üzerindeki çalışmaları nedeniyle.)

$\delta(t)$, $t = 0$ için tanımlanmış bir fonskiyondur. Ancak herhangi bir t_0 noktası içinde ötelenmiş olarak $\delta(t - t_0)$ şeklinde de tanımlanabilir. Bu durumda özellikleri

$$\delta(t - t_0) = 0, \qquad t \neq t_0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1.$$

Şimdi $\delta(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmaya çalışalım: Açıktırki

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{\tau\to 0}\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}, \qquad \text{yazılabilir.}$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\int_0^\infty e^{-st}d_\tau(t-t_0)dt$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st}d_\tau(t-t_0)dt$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st}dt = -\frac{1}{2s\tau}e^{-st}\Big|_{t=t_0-\tau}^{t=t_0+\tau}$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2s\tau}e^{-st_0}(e^{s\tau}-e^{-s\tau})$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\frac{\sinh s\tau}{s\tau}e^{-st_0}$$

Ancak $\tau\to 0$, $(\sinh s\tau/s\tau)$ tanımsızdır. Bu durumda limit ancak L'Hospital kuralı ile bulunabilir. Bu durumda

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\sinh s\tau}{s\tau}e^{-st_0} = \lim_{\tau\to 0}\frac{s\cosh s\tau}{s} = 1$$

Bu duruda açıktırki $\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}}$

Özel olarak $t_0 = 0$ kabul edilirse

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1}$$

elde edilir.

Örnek: $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = u(t)$

şeklide yanımlanmış bir sistem için $u(t) = 2e^{-2t} \quad t \geq 0$ şeklinde bir giriş olsun. Şayet $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ ise sistem yanıtı $y(t)$ ne olur?

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)(s+4)} = -\frac{1}{(s+2)} + \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+4)}$$

elde edilir. Bu durumda

$$y(t) = -e^{-2t} + 2/3e^{-t} + 1/3e^{-4t} \quad t \geq 0$$

şeklide hesaplanır.

Periyodik Fonksiyonların Laplas Dönüşümleri

Tanım (Periodik Fonksiyon:) Bir $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t+T) = f(t)$$

$\forall t$ için ise bu $f(t)$ fonksiyonu $T > 0$ periodiktir denir. Periodik bir fonksiyonu tanımlamak için genellikle pencereleme tektiği kullanılır, şöyleki:

$$f_T(t) = f(t)[1 - u_T(t)] = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{aksi durumlarda.} \end{cases}$$

Burada $f_T(t)$ pencerelenmiş fonksiyonu göstermektedir. $f_T(t)$ nin Laplace dönüşümü ise

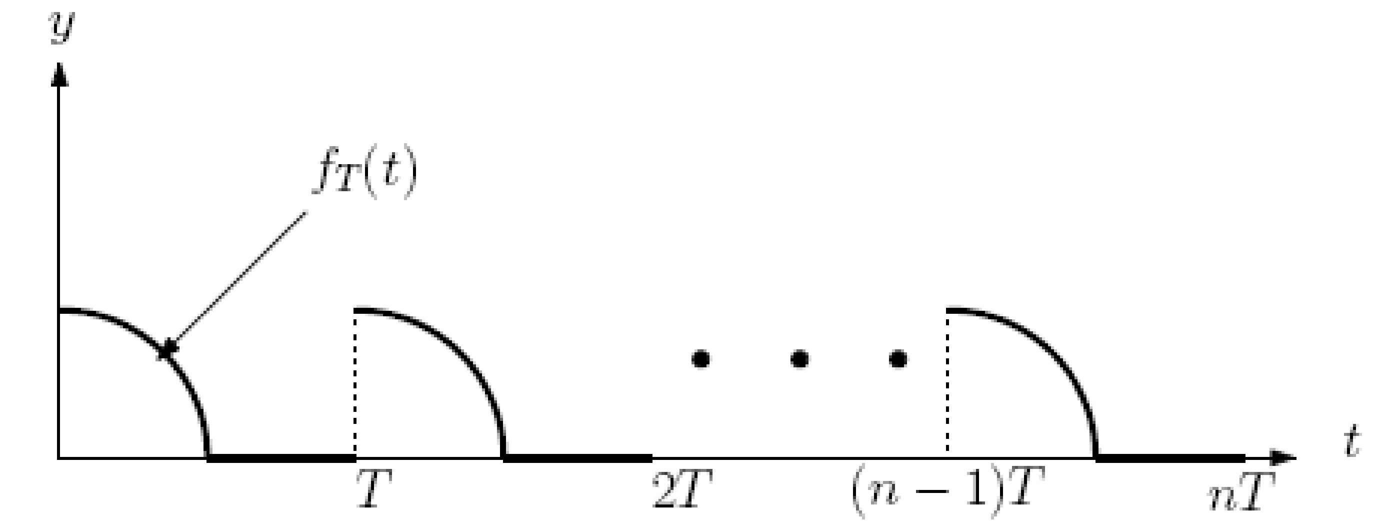
$$F_T(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_T(t)dt \;\; = \int_0^{T} e^{-st} f(t)dt$$

Pencerelenmiş yukarıdaki fonksiyon ilk T süre için tanmlanmıştır. Bu fonksiyonun k periyot kadar sağa ötelenmesi durumunda pencerelenmiş fonksiyon

$$f_T(t-kT)u_{kT}(t) = \begin{cases} f(t-kT), & kT \leq t \leq (k+1)T \\ 0, & \text{aksi durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda $[0, nT]$ süresi içinde ötelenmiş fonksiyonların toplanması f_{nT} şeklinde gösterilebilir:

$$f_{nT}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_T(t-kT)u_{kT}(t).$$



Bu durumda fonksiyonun tümü

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T(t - nT)u_{nT}(t)$$

şeklinde gösteriebilir.

Teorem f, $[0,T]$ aralığında parçalı sürekli, T periyodik bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F_T(s)}{1-e^{sT}} = \frac{\int_0^T e^{-sT} f(t)dt}{1-e^{-sT}}.$$

İspat: Biliyoruz ki

$$\mathcal{L}\{f_T(t-kT)u_{kT}(t)\} = e^{-kTs}\mathcal{L}\{f_T(t)\} = e^{-kTs}F_T(s)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan Laplace dönüşümünün lineer oluşundan dolayı,

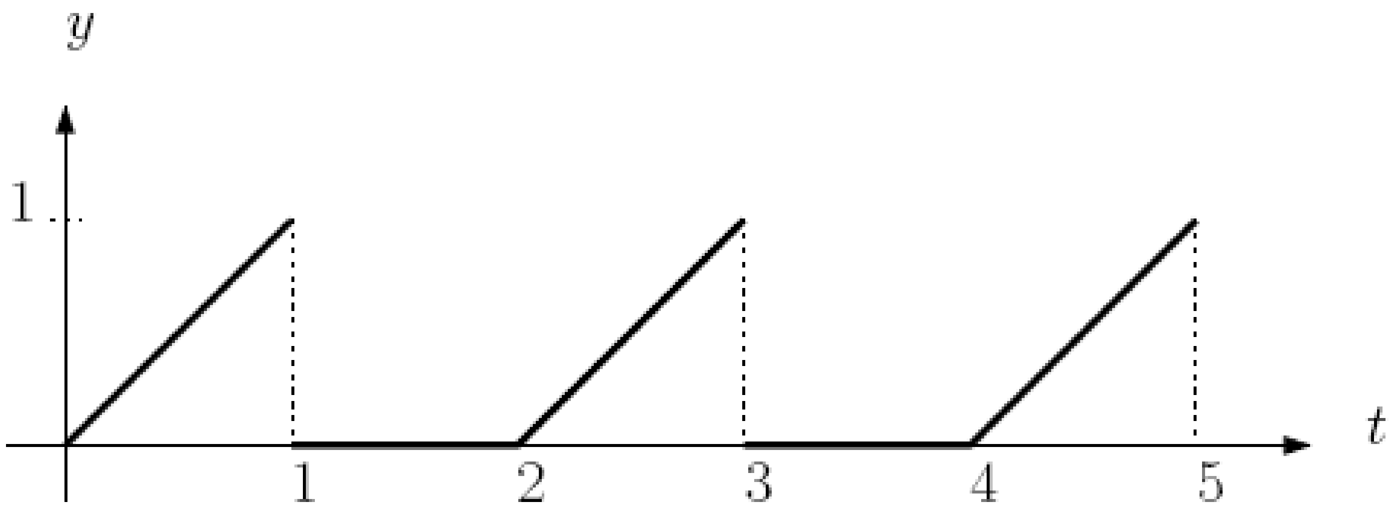
$$F_{nT}(s) = \int_0^{nT} e^{-st}f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}\{f_T(t-kT)u_{kT}(t)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kTs}F_T(s) = F_T(s)\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-sT}\right)^k = F_T(s)\frac{1-(e^{-sT})^n}{1-e^{-sT}}$$

Burada $sT > 0$ olduğu düşünülürse $e^{-sT} < 1$ olur. Bu durumda

$$F(s)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{nT} e^{-sT}f(t)dt=\lim_{n\to\infty}F_T(s)\frac{1-(e^{-sT})^n}{1-e^{-sT}}=\frac{F_T(s)}{1-e^{-sT}}$$

Örnek: Aşağıdaki şekildeki fonksiyonun Laplas dönüşümünü bulunuz.



$$f(t)=\begin{cases} t, & 0<t<1, \\ 0, & 1<t<2 \end{cases}$$

Şekildeki fonksiyonun periyodu 2 dir, T=2.

$$F_T(s) = \int_0^2 e^{-st} f(t)dt = \int_0^1 s^{-st} t dt = \frac{1-e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2(1-e^{-2s})} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-2s})}$$

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonun ters Laplas dönüşümünü hesaplayınız

$$F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})}$$

Çözüm: Açıktırki paydada bulunan $(1-e^{-2s})$ şeklindeki terim bu ifadenin periyodik, hatta periyodunundа $T=2$ olduğunu ortaya koymaktadır. Bu durumda

$$F_T(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} = \underbrace{\frac{1}{s}}_{F_1(s)} - \underbrace{\frac{e^{-s}}{s}}_{F_2(s)}$$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$ ve $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-s}}{s}\} = u_1(t)$ olduğundan

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

elde edilir.

Son değer teoremi Bu teorem bir fonksiyonun kararlı hal değerinin s-tanım bölgesinde hesaplanmasında kullanılır. Şayet $sY(s)$'in tüm kutupları s-düzleminin solunda ise

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$