Otomatik Kontrol

Kararlılık (Stability)

Prof.Dr.Galip Cansever

Kararlılık, geçici rejim cevabı ve sürekli hal hatası gibi kontrol tasarımcısının üç temel unsusrundan en önemli olanıdır.

Lineer zamanla değişmeyen sistemlerin doğal cevabı zamanla sıfıra gidiyorsa sistem kararlıdır denir.

$$c(t) = c_{zor}(t) + c_{öz}(t)$$

Sistem toplam cevabı doğal(öz) ve zorlanmış çözümün toplamı olduğu için kararlı sistemlerde doğal çözüm zamanla sıfıra ulaşacağı için toplam cevap zorlanmış cevap olur.

Lineer zamanla değişmeyen sistemlerin doğal cevabı zamanla sonsuza gidiyorsa sistem kararsızdır denir.

Lineer zamanla değişmeyen sistemlerin doğal cevabı zamanla azalmıyorsa ve artmıyorsa sistem marjinal kararlıdır denir. Sabit veya osilasyonlu cevap üretiler. Parametre değişimine duyarlı oldukları için kararsız kabul edilirler.

Fiziksel olarak, doğal cevabı sınırsız olan kararsız sistemler kendilerine, etrafındaki araç gereçlere veya insanlara zarar verebilirler.

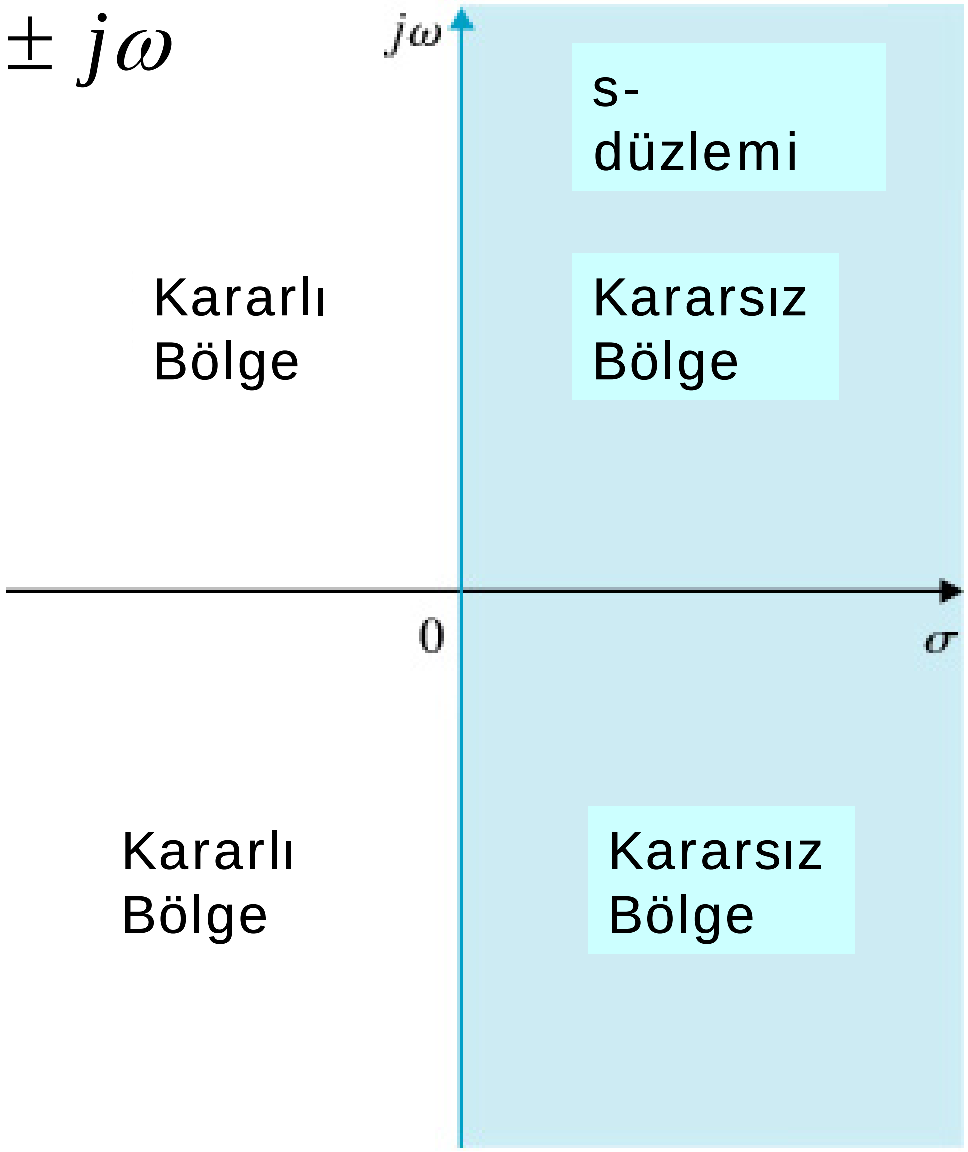
Lineer sistemlerde kararlılık sistemin kendi özelliğidir.

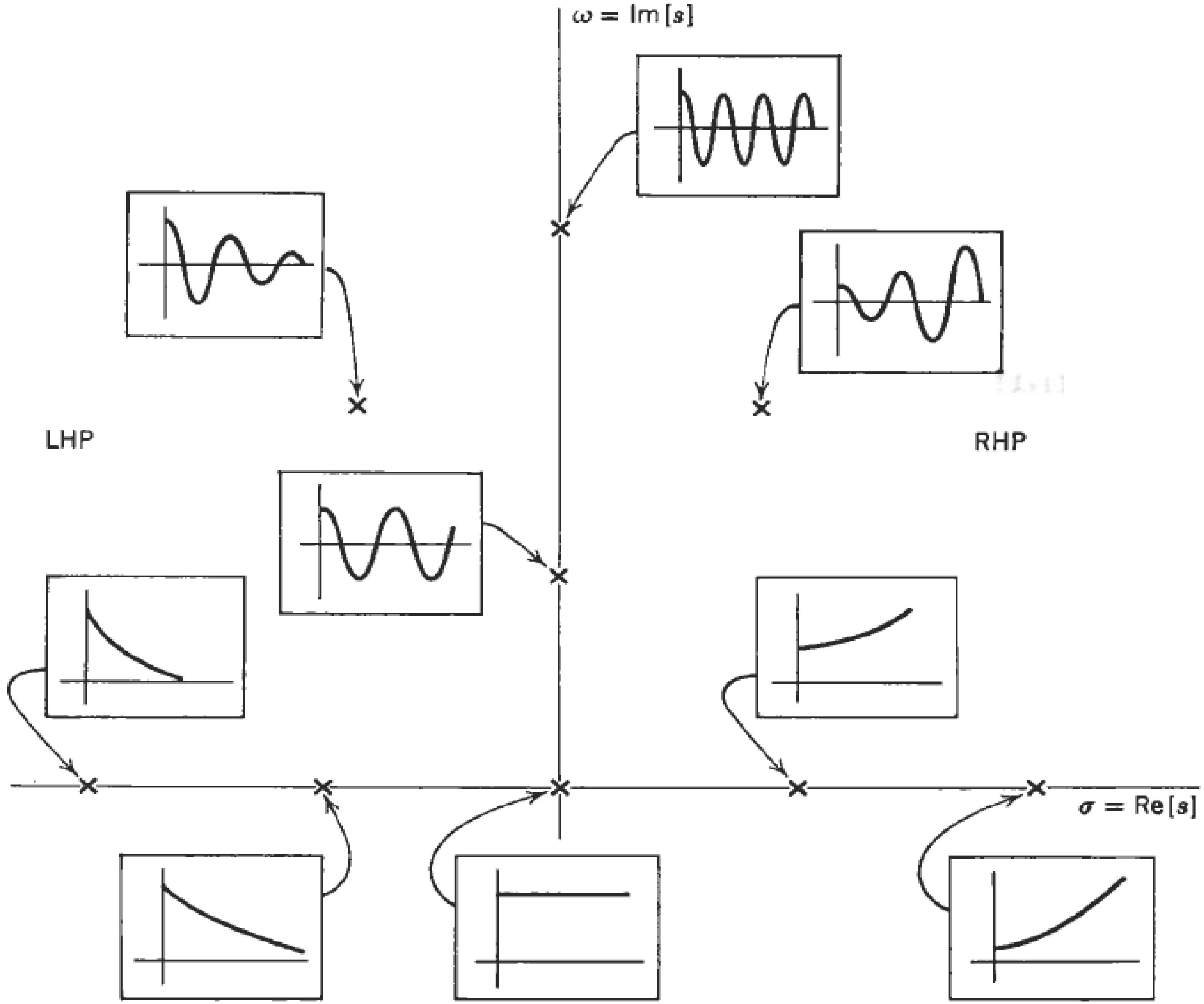
Kararlı bir lineer sistemin denge noktasına bir bozucu etki tesir ederse, sitem zamanla kendiliğinden denge noktasına döner.

Kararlılığın bir diğer tanımıda;sistemin girişine uygulanan bütün sınırlı giriş işaretleri için çıkışta sınırlı kalıyorsa sistem kararlıdır denir.(BIBO)

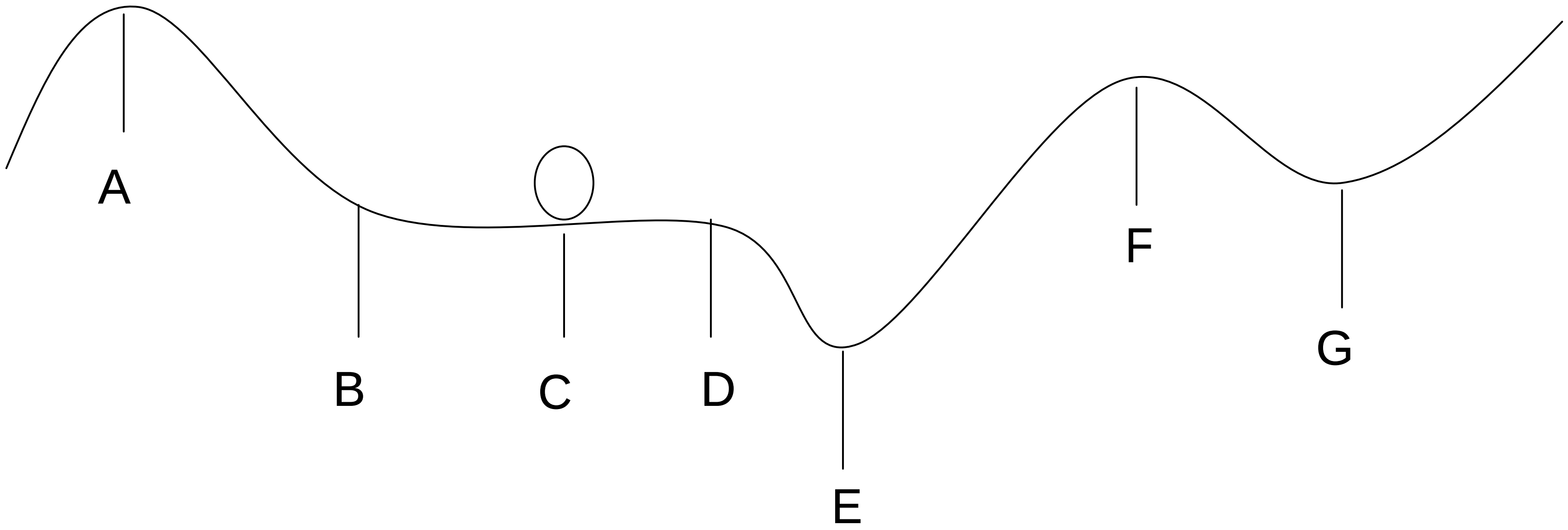
Lineer zamanla değişmeyen sistemlerde, sistem kutupları sol yarı düzlemde ise kararlı, diğer durumlarda ise kararsızdır. denir.

$$s = -\sigma \pm j\omega$$





$\omega = \mathrm{Im}[s]$
LHP
RHP
$\sigma = \mathrm{Re}[s]$

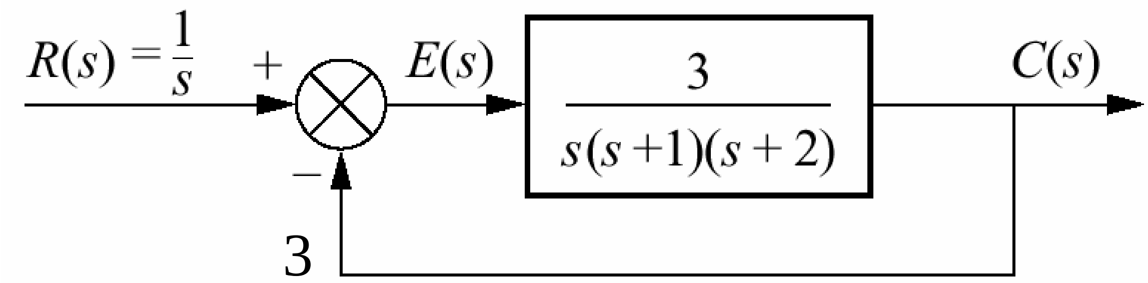


Top **A** ve **F** noktalarında iken küçük bir kuvvet uygulanırsa, **A** ve **F** noktalarına bir daha dönemez. Bu durumda **A** ve **F** noktaları kararsız noktalardır.

Top **E** ve **G** noktalarında iken küçük bir kuvvet uygulanırsa, **E** ve **G** noktalarına salınım yaparak geri döner. Bu durumda **E** ve **G** noktaları kararlı noktalardır.

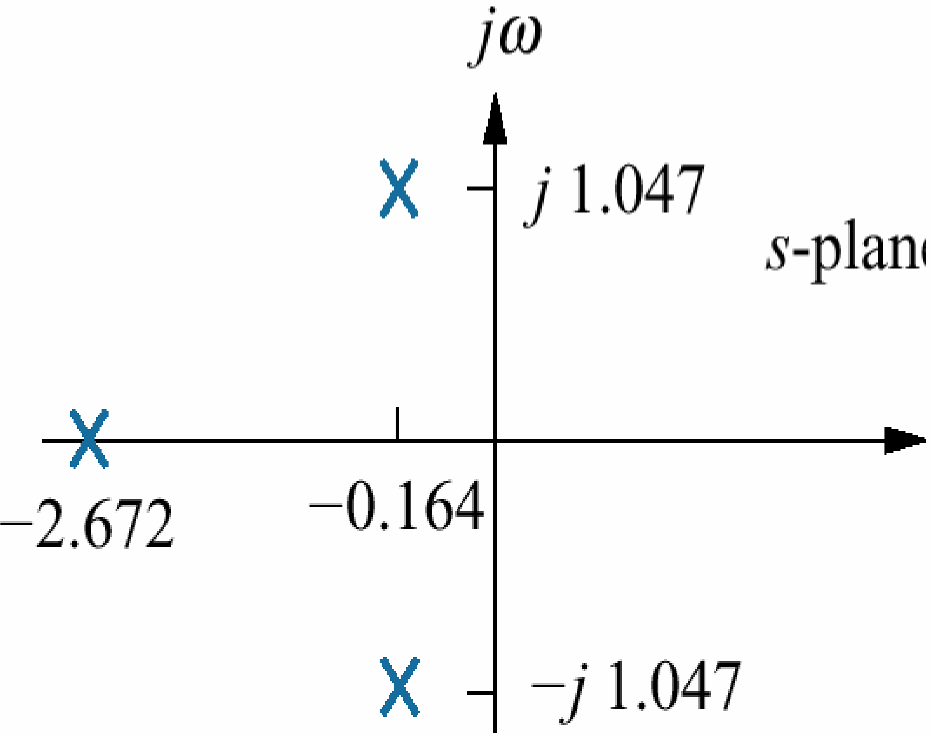
Top **B** ve **D** noktaları arasında iken küçük bir kuvvet uygulanırsa, yeni noktasında kalır. **C** gibi böyle noktalara nötr kararlı denir.

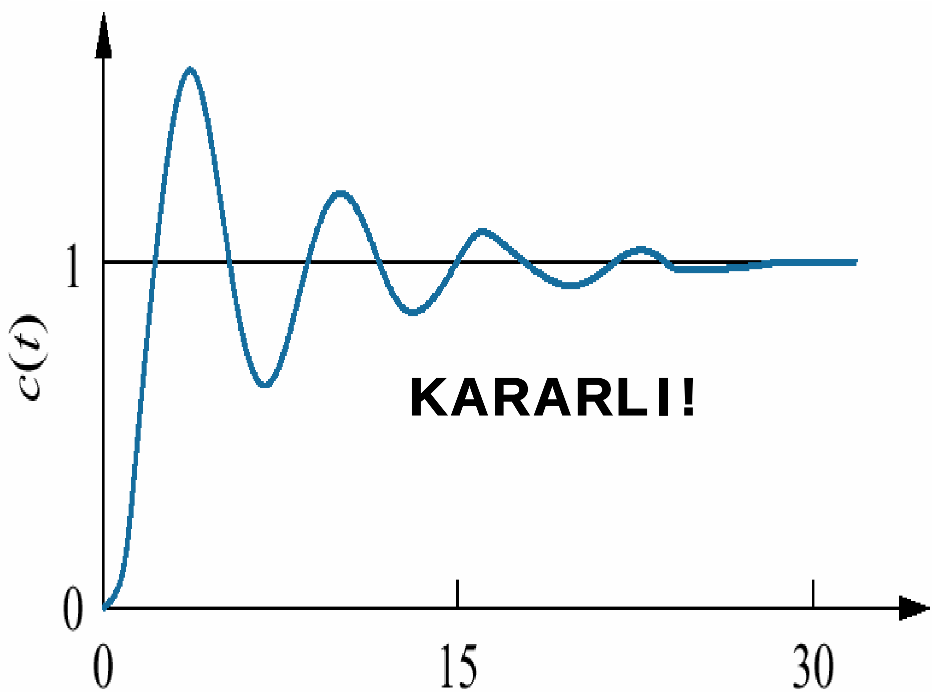
Örnek:



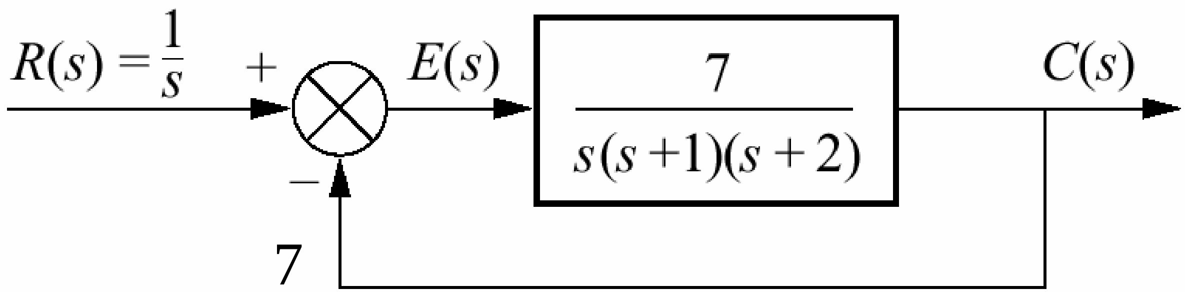
$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{3}{s(s+1)(s+2)}}{1+\dfrac{3}{s(s+1)(s+2)}}=\frac{3}{s^3+3s^2+2s+3}$$

$s_1=-2.672,\ s_{2,3}=-0.164\pm j1.047$



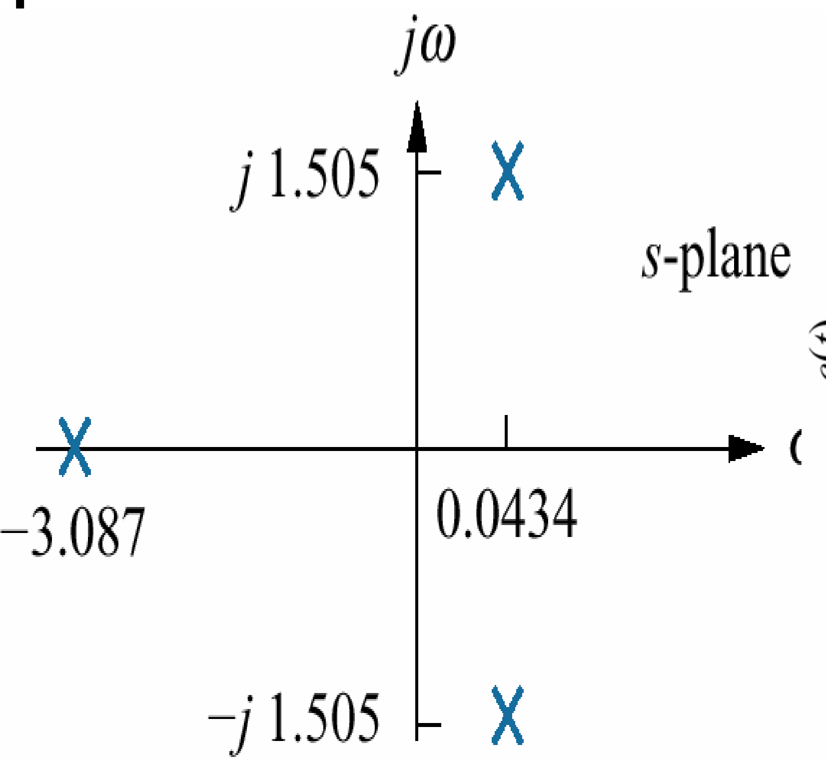


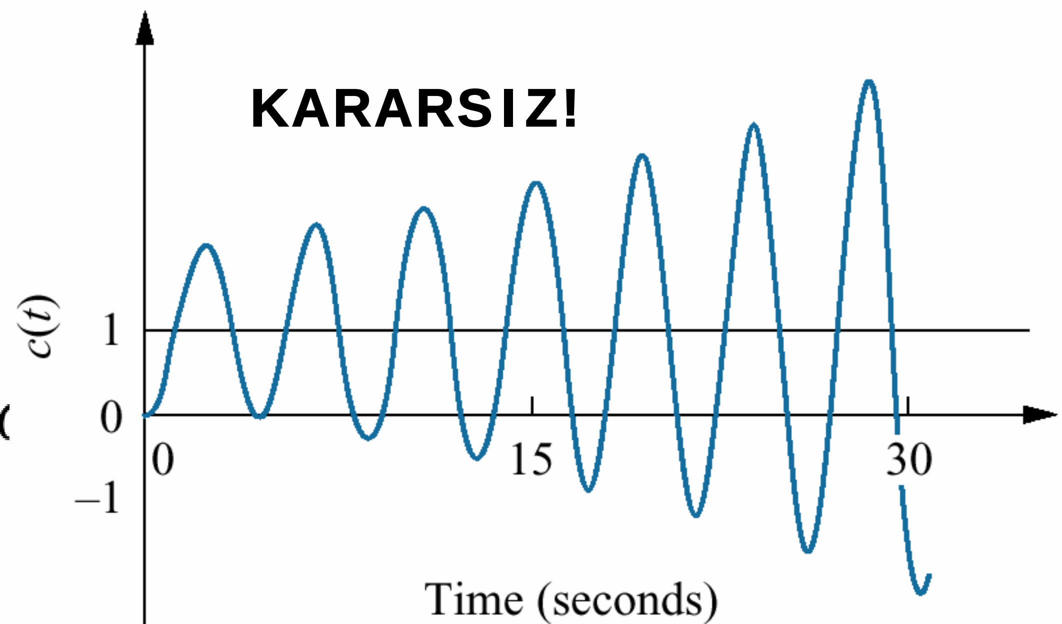
Örnek:



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{7}{s(s+1)(s+2)}}{1+\dfrac{7}{s(s+1)(s+2)}}=\frac{7}{s^3+3s^2+2s+7}$$

$s_1=-3.087,\ s_{2,3}=0.043\pm j1.505$





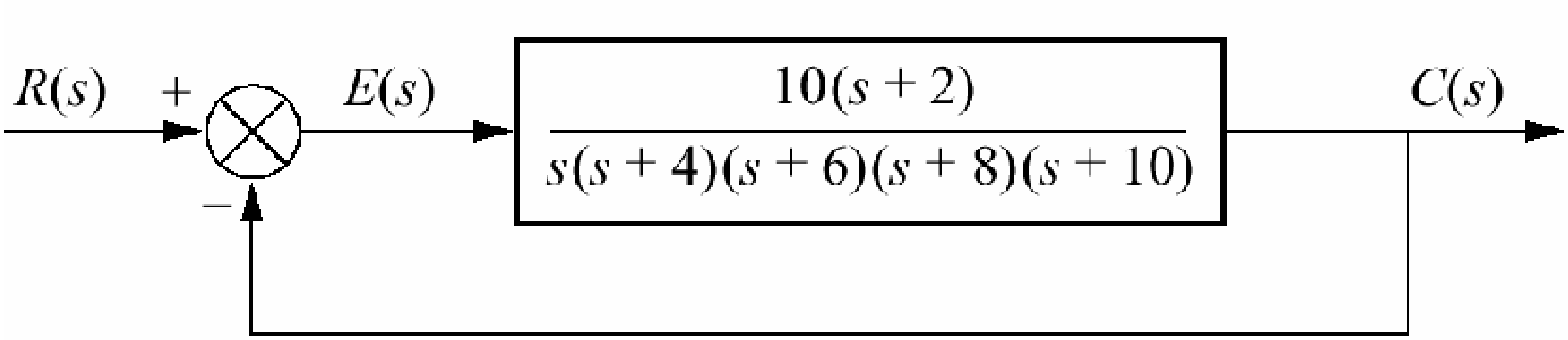
Sağ yarı düzlemdeki kutuplar ya üstel artımla yada üstel artan sinüsoidal doğal cevap oluşturur ki doğal cevap zamanla sonsuza kadar artar.

Ayrıca, imajiner eksen üzerinde katlı kök varsa $At^n \cos(\omega t + \phi)$

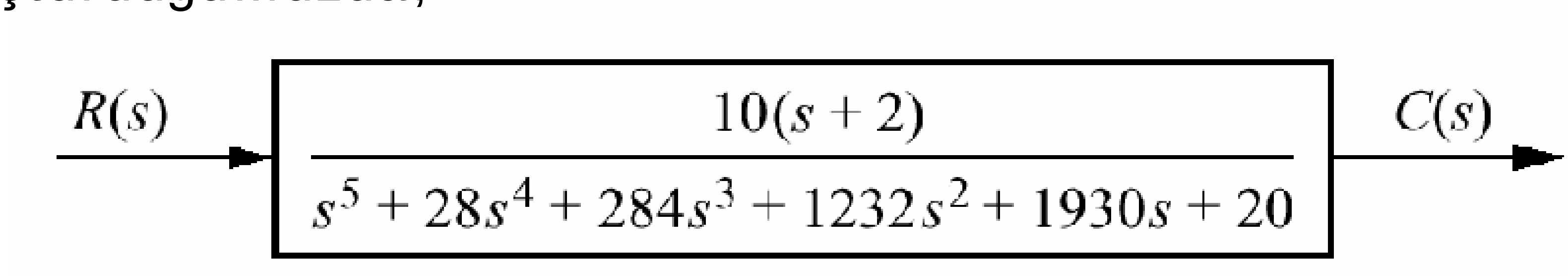
şeklinde bir cevap üretir ki buda zamanla sonsuza gider ve sistem bu durumda yine kararsızdır.

<u>Demek ki bir sistemin kararsız olması için en az bir kutbunun sağ yarı düzlemde yada imajiner eksen üzerinde katlı kökünün olması yeterlidir.</u>

İmajiner eksen üzerinde bir kök varsa sistem cevabı osilasyonludur. Bu tip sistemlere marjinal kararlı sistemler denir.



Yukarıdaki sistemin kararlılığnı belirlemek üzere kapalı döngü kutuplarına ihtiyacımız var. Kapalı döngü transfer fonksiyonunu oluşturduğumuzda;



Elde ederiz ki bu polinomun köklerini ancak bilgisayar yardımı ile bulabiliriz.

Lineer zamanla değişmeyen sistemlerin kararlılıklarını belileyebileceğimiz başka kriter ve teoremlere ihtiyacımız var. Bunlardan bir tanesi **Hurwitz** testidir.

Eğer bir kapalı döngü transfer fonksiyonunun bütün kutupları sol yar düzlemde ise, bu sistemim paydasındaki polinomunu, yani karakteristik denklemini, $(s+a_i)$ şeklinde çarpanlara ayırabiliriz. a_i'ler pozitif yada pozitif gerçel kısıma sahip karmaşık sayılardır.

Böylece buradan $(s+a_i)$ 'lerin çarpımlarının bütün katsayıları pozitif olan polinom oluşturması gerektiğini söyleyebiliriz. Ayrıca bütün katsayılar var olmalıdır.

Buradan bir sistemin kararsız olduğunu söylemek için katsayıların işaretlerinden bir tanesinin negatif olmasının yeterli olduğunu belirtebiliriz.

Eğer **s**'in kuvvetlerinden biri eksik ise sistem ya kararsızdır yada marjinal kararlıdır.

Toparlayacak olursak **Hurwitz** testi der ki: Kararlı bir sistemin karakteristik polinomunun bütün katsayıları var olmalı ve pozitif olmalıdır. Bu test sistemin kararlılığı için gerekli fakat yeterli değildir.

Routh-Hurwitz Kriteri

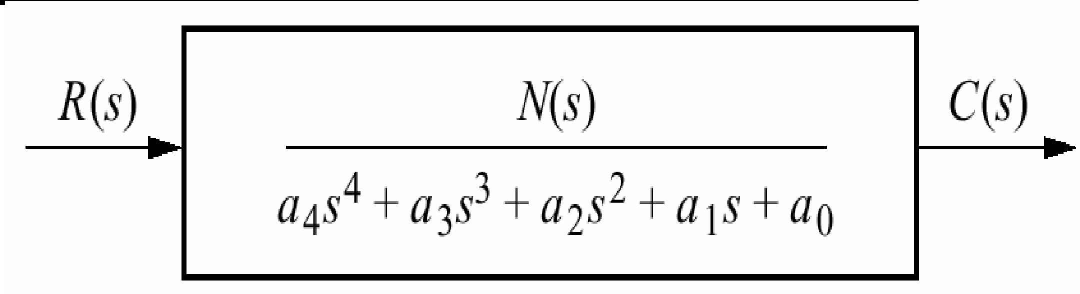
Bu yöntemle kapalı döngü sistem kutuplarını çözmeden sistem kararlılığı hakkında bilgi sahibi oluruz.

Ayrıca sistemin kaç tane sol yarı düzlemde, kaç tane sağ yarı düzlemde ve kaç tane imajiner eksen üzerinde kutbu olduğunu bulabiliriz. Bu method'a **Routh Hurwitz** kriteri adı verilir, 1905.

Bu methot iki adımdan oluşur:

1. Routh tablosunu oluşturmak
2. Tabloyu yorumlamak

Routh Tablosonun Oluşturulması:

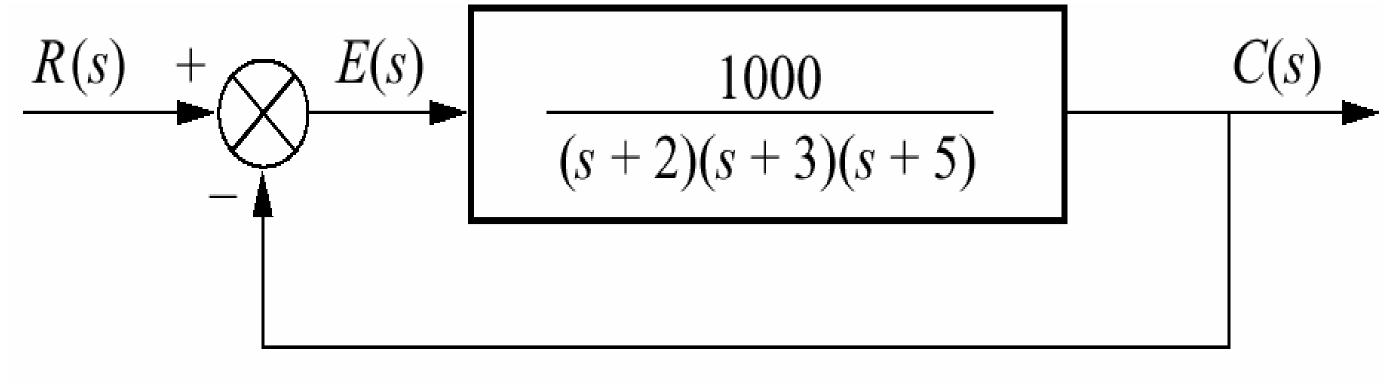


İlk kolona s'nin en yüksek derecesiden başlayarak 0'ıncı kuvvetine kadar dereceleri yazılır. Daha sonra il satıra en yüksek derecenin katsayısı ve birer atlayarak diğer derecelerin katsayıları yazılır. İkinci satıra en yüksek ikinci derecenin katsayısı ve birer atlayarak diğer derecelerin katsayıları yazılır.

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

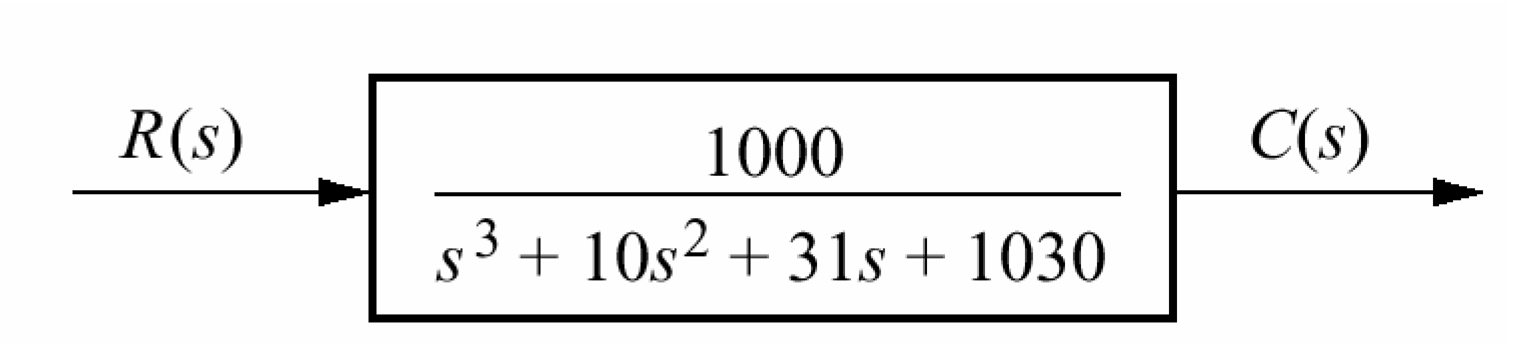
s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Örnek:



Kapalı döngü sistemi için Routh tablosunu oluşturun.

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{1000}{(s+2)(s+3)(s+5)}}{1+\dfrac{1000}{(s+2)(s+3)(s+5)}}=\frac{1000}{s^3+10s^2+31s+1030}$$



$$\frac{1000}{s^3+10s^2+31s+1030}$$

s^3	1	31	0
s^2	$\cancel{10}$ 1	$\cancel{1030}$ 103	0
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 31\\1 & 103\end{vmatrix}}{1}=-72$	$\dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}}{1}=0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}}{1}=0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 103\\-72 & 0\end{vmatrix}}{-72}=103$	$\dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\-72 & 0\end{vmatrix}}{-72}=0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\-72 & 0\end{vmatrix}}{-72}=0$

Routh Tablosonun Yorumlanması:

Routh-Hurwitz kriteri derki; birinci kolondaki işaret değişim sayısı kadar sistemin sağ yarı düzlemde kökü vardır.

Bir önceki örneği düşünecek olursak; birin kolon elemanları:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -72 \\ 103 \end{bmatrix}$$

İşaret değişimi

İşaret değişimi

2 kere işaret değiştirdiğine göre sistemin sağ yarı düzlemde iki kökü vardır. Sistemin sağ yarı düzlemde en az bir kökünün olması kararsız olması için yeterli idi, böylece sistem kararsızdır diyebiliriz.

Routh-Hurwitz Kriterinde Özel Durumlar

İki özel durum olabilir:

1. Satırlardan herhangi birinin ilk elamanının sıfır olması
2. Satırlardan birinin tamamen sıfır olması

1. Satırlardan herhangi birinin ilk elamanının sıfır olması:

Satrılardan birinin ilk elemanınım sıfır olması durumunda bir sonraki satırın elemanlarını bulunurken sıfıra bölüm problemi ortaya çıkar.

Sıfıra bölümü önlemek için sıfır yerine **ε** yazarız.

Örnek: $$T(s)=\frac{10}{s^5+2s^4+3s^3+6s^2+5s+3}$$

Yukarıdaki kapalı döngü transfer fonksiyonunun kararlılığını Routh tablosu oluşturarak belirleyiniz.

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$\cancel{0}$ ε	7/2	0
s^2	$\dfrac{6\varepsilon-7}{\varepsilon}$	3	0
s^1	$\dfrac{42\varepsilon-49-6\varepsilon^2}{12\varepsilon-14}$	0	0
s^0	3	0	0

ε (+) da olabilir (-) de olabilir.

Label	First Column	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
s^5	1	+	+
s^4	2	+	+
s^3	$\cancel{0}\quad \epsilon$	+	-
s^2	$\dfrac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	-	+
s^1	$\dfrac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	+	+
s^0	3	+	+

Görüldüğü gibi ε pozitif de seçilse negatifte seçilse sistem kararsızdır ve iki defa işaret değiştiği için sağ yarı düzlemde iki kutup vardır.

2. Satırlardan Birinin Tamamen Sıfır Olması:

Bu durumda, bir önceki satıra gidip yardımcı polinom oluştururuz.

Polinom ilgili satırın s'in derecesi ile başlar ve birer atlayarak devam eder.

Sonra polinomun s'ye göre türevini alırız.

Bu katsayıları tamamı sıfır olan satırda kullanırız.

Örnek: $$T(s)=\frac{10}{s^5+7s^4+6s^3+42s^2+8s+56}$$

Yukarıdaki kapalı döngü transfer fonksiyonunun kararlılığını Routh tablosu oluşturarak belirleyiniz.

s^5	1	6	8
s^4	$\cancel{7}$ 1	$\cancel{42}$ 6	$\cancel{56}$ 8
s^3	0	0	0
s^2			
s^1			
s^0			

Görüldüğü gibi üçüncü sıranın tamamı sıfır.

Bu durumda, bir önceki satıra gidip yardımcı polinom oluştururuz.

Polinom ilgili satırın s'in derecesi ile bşlar ve birer atlayarak devam eder.

$$P(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

Sonra polinomun s'ye göre türevini alırız.

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s$$

Bu katsayıları tamamı sıfır olan satırda kullanırız.

s^5	1	6	8
s^4	1	6	8
s^3	$\cancel{0}$ $\cancel{4}$ 1	$\cancel{0}$ $\cancel{12}$ 3	$\cancel{0}$ $\cancel{0}$ 0
s^2	3	8	0
s^1	1/3	0	0
s^0	8	0	0

Genelleştirecek olursak Routh tablosunda bir satırın tamamen sıfır olması, polinomda tamamen tek sayılı derecelerin yada çift sayılı derecelerin olmasından kaynaklanır.

Örnek: $s^4 + s^2 + 7$

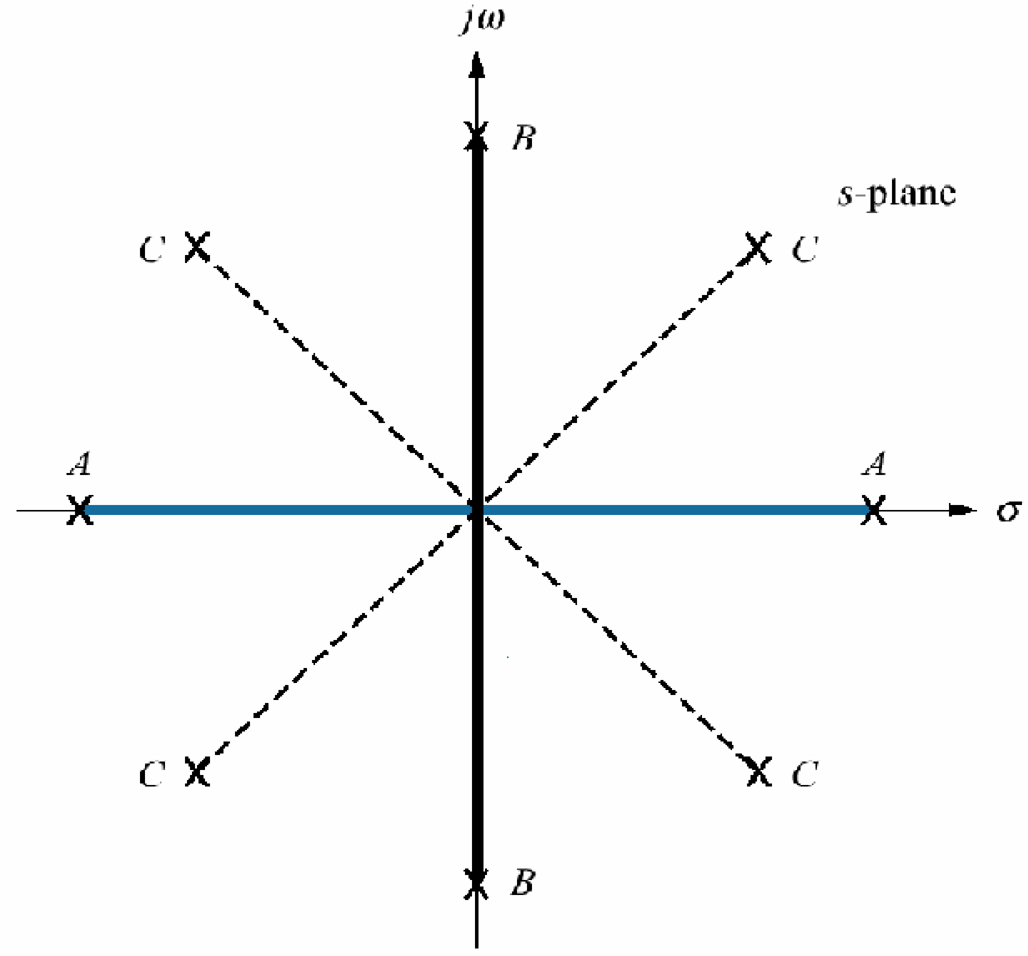
Çift sayı derecelerin kökleri orjine göre simetriktir. Bu simetri:

A) Reel simetrik olabilir

B)İmajiner Simetrik olabilir

C)Dört bölgeli olabilir.

Sıfır satırı bize kökleri orjine göre simetrik olan çit sayı dereceli polinomun varlığını söyler.



Örnek:

$$T(s) = \frac{20}{s^8 + s^7 + 12s^6 + 22s^5 + 39s^4 + 59s^3 + 48s^2 + 38s + 20}$$

Yukarıdaki kapalı döngü transfer fonksiyonunun kararlılığını Routh tablosu oluşturarak belirleyiniz.

s^8	1	12	39	48	20
s^7	1	22	59	38	0
s^6	$\cancel{-10}$ -1	$\cancel{-20}$ -2	$\cancel{10}$ 1	$\cancel{20}$ 2	0
s^5	$\cancel{20}$ 1	$\cancel{60}$ 3	$\cancel{40}$ 2	0	0
s^4	1	3	2	0	0
s^3	0	0	0	0	0
s^2					
s^1					
s^0					

Polinomu oluşturacak olursak: $P(s) = s^4 + 3s^2 + 2$

Ve Türevi $\dfrac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 6s$

s^8	1	12	39	48	20
s^7	1	22	59	38	0
s^6	~~-10~~ -1	~~-20~~ -2	~~10~~ 1	~~20~~ 2	0
s^5	~~20~~ 1	~~60~~ 3	~~40~~ 2	0	0
s^4	1	3	2	0	0
s^3	0 ~~4~~ 2	0 ~~6~~ 3	0 ~~0~~ 3	0	0
s^2	~~3/2~~ 3	~~2~~ 4	0	0	0
s^1	1/3	0	0	0	0
s^0	4	0	0	0	0

s^4 den s^0 ‘ a kadar işaret değişimi olmadığı için sağ yarı düzlemde kutup yoktur.

Eğer sağ yarı düzlemde kutup yoksa simetrisi de olamayağından sol yarı düzlemde yoktur.

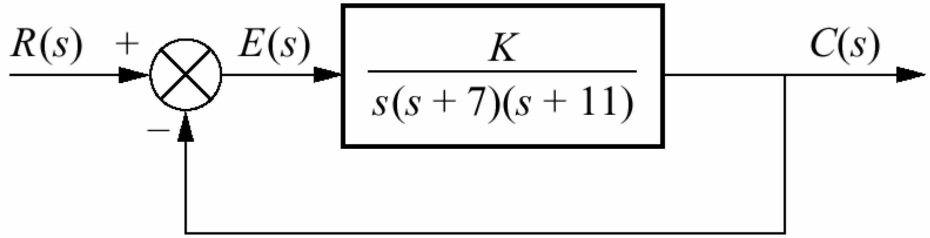
Buradan 4 kökün **jω** ekseni üzerinde olduğunu anlarız.

Diğer kutuplar s^8 den s^4 e kadar olan kutuplardır. Bu iki kuvvet arasında iki işaret değişimi olmuştur ki bunun manası sağ yarı düzlemde iki kök mevcuttur.

Sonuç olarak transfer fonksiyonunun iki sağ yarı dülemde, iki sol yarı düzlemde ve 4 imajiner eksen üzerinde kutbu vardır. Sağ yarı düzlemde en az bir kutbun olması sistemin karasız olduğunu söylemek için yeterli idi, doalyısıyla sistem kararsızdır.

	Polynomial		
Location	**Even (fourth-order)**	**Other (fourth-order)**	**Total (eighth-order)**
Right half-plane	0	2	2
Left half-plane	0	2	2
$j\omega$	4	0	4

Örnek:



Sistemi kararlı, marjinal kararlı ve kararsız yapacak **K** değerlerini bulunuz. (**K**’nın 0’dan büyük olduğunu varsayalım)

Kapalı döngü TF: $$T(s)=\frac{K}{s^3+18s^2+77s+K}$$

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\dfrac{1386-K}{K}$	
s^0	K	

Eğer **K <1386** ise birinci sutundaki tüm elemanlar pozitif olur ve sistem kararlıdır diyebiliriz, sistemin üç kutbu da sol yarı düzlemdedir.

Eğer **K >1386** ise $\mathbf{s^1}$ deki birinci sütundaki ilk eleman negatif olur. İlk sütunda iki defa işaret değişimi görünür ki kutuplardan iki tanesi sağ yarı düzlemdedir ve sistem kararsızdır.

Eğer **K =1386** ise $\mathbf{s^1}$ deki tüm elemanlar **0** olur.

Polinomu oluşturacak olursak: $$P(s) = 18s^2 + 1386$$

Ve Türevi $$\frac{dP(s)}{ds} = 36s$$

$\mathbf{s^2}$ li terimden sonra işaret değişimi olmadığı için çift polinomun iki kökü **jω** ekseni üzerindedir. $\mathbf{s^2}$ li terimin üzerinde işaret değişimi olmadığı için diğer kök sol yarı düzlemdedir. Sistem marjinal kararlıdır.

s^3	1	77
s^2	18	1386
s^1	$\cancel{0}$ 36	
s^0	1386	

The FANUC Robot M- 400 can bec configured for 4- or 5-axis of motion.

Örnek:

$$s^4 + 3s^3 + 30s^2 + 30s + 200$$

Polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Routh tablosunu oluşturalım:

s^4	1	30	200
s^3	$\cancel{3}$ 1	$\cancel{30}$ 10	
s^2	$\cancel{20}$ 1	$\cancel{200}$ 10	
s^1	$\cancel{0}$ 2	$\cancel{0}$ 0	
s^0	10		

$$P(s) = s^2 + 10 \qquad \frac{dP(s)}{ds} = 2s$$

$P(s) = s^2 + 10$ Orjinal polinomun çarpanıdır. Dolayısıyla diğer çarpan:

$$s^2 + 3s + 20$$

$$s^4 + 3s^3 + 30s^2 + 30s + 200 = (s^2 + 10)(s^2 + 3s + 20)$$

$$= (s + j3.1623)(s - j3.1623)(s + 1.5 + j4.213)(s + 1.5 - j4.213)$$

ÖZET

Lineer kapalı döngü sistemlerin kararlılıkları kutuplarının s düzlemindeki konumları ile belirlenebilir. Eğer kutuplardan herhangi biri sağ yarı düzlemde ise geçici rejim cevabı monoton olarak artar veya artan genlikle osilasyon oluşturur. Böyle sistemler kararsız sistemler olarak adlandırılır. Kararsız sistemler, çalıştırıldığında çıkış zamanla artış gösterir. Eğer herhangi bir doyum fonksiyonu uygulanmadıysa veya mekaniksel sınırlandırma getirilmediyse fiziksel sistem mekaniksel hasar görebilir. Dolayısıyla kapalı döngü sistemlerinin kutuplarının sağ ayrı düzlemde olmasından kaçınılır. Eğer sistemin bütün kutuplari jw ekseninin sol tarafında yer alıyorsa her türlü geçici rejim sönümle denge noktasına ulaşır.

Kararlılık sistemin kendi özelliğidir, sistem kararlı veya kararsız olsun sistem giriş fonksiyonundan bu özelliği bağımsızdır. Sistem girişi sistemin kararlı veya kararsız olmasını etkileyemez ama çözümde kendini gösterir. Matematiksel olarak, jw ekseni üzerindeki kutuplar osilasyona sebebiyet verirler ve bu osilasyonların genlikleri zamanla ne artar ne de azalır. Pratikte, yani gürültülü ortamda, gürültünün seviyesine göre osilasyonun genliği artış gösterir. Dolayısıyla, kontrol sistemi jw ekseni üzerinde kutup içermemelidir.